Mathematics

D-
MAR 1

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 180

Heft 1/2

Ausgegeben am 28. Januar 1939

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1939

Band 180. Heft 1/2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Rédei, Ladislaus, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. I.	1
Haupt, Otto, Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen. Zweite Mitteilung: Konstruktion normierter Kreissysteme	44
Engel, Friedrich, Eine neue Darstellung der Integrationstheorie der vollständigen Systeme	73
Graeser, Ernst, Potentialströmungen in Kanalsystemen	86
Jung, Heinrich W. E., Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen	97
George, Erich, Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier	110
Nevanlinna, Rolf, Über das alternierende Verfahren von Schwarz	121

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. I. [1])

Von *Ladislaus Rédei* in Budapest.

Es seien a_1, a_2, a_3 drei (nicht notwendig paarweise) teilerfremde, von 1 verschiedene, quadratfreie ganze rationale Zahlen der Form $4l + 1$. Es sei ferner a_1 quadratischer Rest für alle Primfaktoren von $a_2 a_3$. Dann gibt es zwei teilerfremde, ganze Ideale $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ im Körper $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ [2]) mit der Norm a_2 bzw. a_3. Gibt es in k_1 eine Zahl α_2, die den Bedingungen $\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{a}_2$, $\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod 4$ [3]) genügt, so ist der Wert des quadratischen Restsymbols $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right)$ [4]) von Null verschieden. Ist schließlich noch der Wert des Symbols $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right)$ von der besonderen Wahl von $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und α_2 unabhängig, also allein durch a_1, a_2, a_3 bestimmt, so definiere ich ein neues Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ durch die Festsetzung

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right).$$

Wenn also das Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert, so hat es einen der Werte $+1$ oder -1. Es existiert z. B. dann, wie wir sehen werden, wenn a_1, a_2, a_3 verschiedene Primzahlen sind und jede der Zahlen a_1, a_2, $|a_3|$ quadratischer Rest der beiden andern ist.

Statt dieser Definition des neuen Symbols werde ich in § 1 von einer durchsichtigeren, mehr auf den Körperbegriff aufgebauten ausgehen. Diese ist für die Anwendungen geeigneter und auch ein wenig allgemeiner, und zwar hauptsächlich dadurch, daß für a_1, a_2, a_3 auch gerade Zahlen zugelassen werden. Es werden dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz des neuen Symbols abgeleitet. Diese lassen sich in übersichtlicher Form ausdrücken mit Hilfe quadratischer Restsymbole in R, in denen nur Teiler von $a_1 a_2 a_3$ vorkommen.

---

[1]) Die vorliegende Arbeit stimmt im wesentlichen überein mit drei in ungarischer Sprache erschienenen Arbeiten des Verfassers: Egy új számelméleti jel, alkalmazással a másodfokú számtestek elméletére I, II. Másodfokú számtestek abszolút osztálycsoportjának 2-, 4- és 8-cal osztható invariánsai. Math. u. nat. Anzeiger d. ungar. Akad. **56** (1937), S. 807-845; **57** (1938), S. 488—500; **56** (1937), S. 848—852.

[2]) R bedeutet den Körper der rationalen Zahlen.

[3]) $x \underset{(2)}{\equiv} y$ bedeutet wie üblich $x = yz^2$. Entsprechend ist auch $x \underset{(2)}{\equiv} y (\mathrm{mod}\ m)$ zu verstehen. Das Hauptideal (α) bezeichne ich kurz mit α. Die Kongruenzen und ebenso später die Potenzrestsymbole sind im multiplikativen Sinne gemeint.

[4]) Statt der üblichen Bezeichnung $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{a}}\right)$ schreibe ich meistens einfach $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$, wenn k der kleinste, α und $\mathfrak{a}$ enthaltende Körper ist.

Die weiteren Untersuchungen lassen sich leicht auf die Betrachtung *reiner* Symbole $\{a_1, a_2, a_3\}$ zurückführen, d. h. auf solche, bei denen a_3 in k_1 in lauter Primideale ersten Grades zerfällt.

In § 2 gewinne ich einige sehr allgemeine Eigenschaften unseres Symbols. Es bestehen die Beziehungen $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}$ und $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\}$, letztere allerdings nur unter gewissen Einschränkungen. Unser Symbol ist ferner in allen drei Argumenten multiplikativ; d. h. z. B., aus der Existenz von zweien der Symbole $\{a, a_2, a_3\}$, $\{b, a_2, a_3\}$, $\{ab, a_2, a_3\}$ folgt die des dritten, und es gilt $\{a, a_2, a_3\}\{b, a_2, a_3\} = \{ab, a_2, a_3\}$, wobei die in ab möglicherweise enthaltene Quadratzahl zu streichen ist und $\{ab, a_2, a_3\} = 1$ für $a = b$ zu setzen ist. Zwei Symbole $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{b_1, b_2, a_3\}$ lassen sich im Falle $a_1 a_2 \underset{(2)}{=} b_1 b_2$ auch *zusammensetzen* nach der Regel $\{a_1, a_2, a_3\}\{b_1, b_2, a_3\} = \{a_1 b_1, a_2 b_1, a_3\}$.

In § 3 behandle ich einige Symbole spezieller Art. Es stellt sich heraus, daß unser Symbol sich in besonderen Fällen durch vierte Potenzrestsymbole $\left(\frac{a}{b}\right)_4$ ausdrücken läßt [5]). Jedes quadratische Restsymbol in R läßt sich zurückführen auf eine Reihe von Symbolen, in denen nur je zwei Primzahlen vorkommen, entsprechendes gilt für die vierten Potenzrestsymbole mit drei Primzahlen. Ob es auch für unsere Symbole eine ähnliche Reduktion gibt, ist noch nicht entschieden.

Die darauf folgenden Paragraphen enthalten Anwendungen unseres Symbols auf quadratische Zahlkörper. Ich bezeichne mit e_{2^n} ($n = 1, 2, \ldots$) die Anzahl der durch 2^n teilbaren Invarianten der absoluten Idealklassengruppe (im engeren Sinne) eines quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D. In früheren Arbeiten habe ich e_4 und e_8 bestimmt [6]). H. Reichardt betrachtete allgemein e_{2^n} [7]). Von $n = 3$ ab sind die Resultate jedoch nicht mehr befriedigend, da gewisse willkürlich wählbare Elemente auftreten, die die Rechnungen sehr weitläufig machen. Nur in speziellen Fällen gelang es mir, mit Hilfe von vierten Potenzrestsymbolen e_8 einfach zu bestimmen [8]). Die Kombination meiner weiteren Untersuchungen [9]) mit der Reichardtschen Arbeit [7]) führte zwangs-

---

[5]) Das Symbol $\left(\frac{a}{b}\right)_4$ ist für ganze rationale Zahlen a, b folgendermaßen erklärt: Ist b eine Primzahl und $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, so soll $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = 1$ oder -1 sein, je nachdem $x^4 \equiv a \pmod b$, im Falle $b = 2$ sogar $\pmod{16}$ lösbar ist oder nicht. Ferner sei $\left(\frac{a}{uv}\right)_4 = \left(\frac{a}{u}\right)_4 \left(\frac{a}{v}\right)_4$, wenn die beiden Symbole auf der rechten Seite erklärt sind.

[6]) L. Rédei, A másodfokú számtest osztálycsoportjának 4-gyel osztható invariánsai, Math. u. nat. Anzeiger d. ungar. Akad. **49** (1932), S. 338—363, mit deutschem Auszug.

L. Rédei, A másodfokú számtest osztálycsoportjának 8-cal osztható invariánsai, Math. u. nat. Anzeiger d. ungar. Akad. **50** (1933), S. 195—218, mit deutschem Auszug.

Vgl. hierzu auch die folgenden Arbeiten:

L. Rédei, H. Reichardt, Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers, dieses Journ. **170** (1933), S. 69—74.

A. Scholz, Über die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Du^2 = -4$, Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 95—111.

L. Rédei, Arithmetischer Beweis des Satzes über die Anzahl der durch vier teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journ. **171** (1934), S. 55—60.

S. Iyanaga, Sur les classes d'idéaux dans les corps quadratiques, Act. scient. et ind. Nr. **197** (1935), S. 3—13.

[7]) H. Reichardt, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journ. **170** (1933), S. 75—82.

[8]) L. Rédei, Über die Grundeinheit und die durch 8 teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im quadratischen Zahlkörper, dieses Journ. **171** (1934), S. 131—148.

Vgl. auch die zweite meiner in [6]) angeführten Arbeiten und die dort genannte Arbeit von A. Scholz.

[9]) L. Rédei, Néhány újabb kongruenciafeltétel a másodfokú számtest abszolút osztálycsoportjának nyolccal osztható invariánsaira, Math. u. nat. Anzeiger d. ungar. Akad. **54** (1936), S. 736—768, mit deutschem Auszug.

läufig zu unserem neuen Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$. In § 4 drücke ich e_8 in sehr einfacher Weise durch dieses Symbol aus.

In § 5 wird gezeigt, daß es unendlich viele Körper $R(\sqrt{D})$ mit beliebig vorgeschriebenen Werten $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$ gibt. Dies beweist die Nützlichkeit unseres neuen Symbols; denn mit den bisherigen Mitteln konnte man nicht einmal die Existenz unendlich vieler Körper mit $e_8 \geqq 2$ nachweisen.

Schließlich wende ich in § 6 unser Symbol an auf die Bestimmung des Vorzeichens der Norm $N\varepsilon$ einer beliebigen Grundeinheit ε in $R(\sqrt{D})$ im „kritischen" Fall, wo nämlich D oder $\frac{1}{8}D$ ein Produkt positiver Primzahlen der Form $4l+1$ ist. Das bekannte Kettenbruchkriterium bietet bei der Anwendung große Schwierigkeiten. Handlicher und in den meisten Fällen ausreichend sind einige schon früher von mir angegebene Kriterien, die auch von A. Scholz bewiesen worden sind.

Diese Resultate seien hier aufgeführt. Ist die Diskriminante D von $R(\sqrt{D})$ als Produkt $D = D_1 D_2$ zweier ganzer rationaler Zahlen D_1, D_2 dargestellt, von denen wenigstens eine die Form $4l+1$ hat, so heißt D_1, D_2 eine D-Zerfälluug. Die beiden D-Zerfällungen D_1, D_2 und D_2, D_1 sind als gleich anzusehen; die D-Zerfällung $1, D$ heißt uneigentlich. Die D-Zerfällung D_1, D_2 heißt von zweiter Art, wenn

$$\left(\frac{D_1}{p}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{D_2}{p}\right) = 1$$

für alle Primfaktoren p von D gilt. Unter Benutzung dieser Begriffe gelten folgende Sätze [10]):

Satz A. Es ist $N\varepsilon = -1$, wenn es keine eigentlichen D-Zerfällungen zweiter Art gibt oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn $e_4 = 0$ gilt.

Satz B. Es ist $N\varepsilon = -1$, wenn es wenigstens eine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art gibt, und wenn für jede derartige Zerfällung D_1, D_2 die Beziehungen

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$$

gelten. Aus diesen Beziehungen folgt $e_8 = 0$.

Später habe ich noch folgende Bemerkung gemacht: Im Falle $e_4 \geqq 3$ ist Satz B nicht anwendbar, weil dann die Voraussetzungen nicht erfüllt sein können. Dabei kommt $e_4 \geqq 3$ sogar unendlich oft vor [11]).

Schließlich haben A. Scholz und ich noch folgendes Resultat erhalten [12]):

Satz C. Es ist stets $N\varepsilon = 1$, wenn es eine D-Zerfällung D_1, D_2 zweiter Art mit $\left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = -1$ gibt. Aus dieser Bedingung folgt $e_4 > e_8$.

Es gelingt mir nun, einen Satz aufzustellen, der alle bisherigen Ergebnisse von A. Scholz und mir umfaßt und dabei Satz B erweitert. Der Beweis kann einheitlich für die beiden Fälle $N\varepsilon = 1$ und $N\varepsilon = -1$ geführt werden und ist dabei sehr einfach. Es ergibt sich auch ein enger Zusammenhang zwischen den Fragen über e_8 und $N\varepsilon$.

Ich bemerke noch, daß man mit Hilfe unseres neuen Symbols auch das Lösbarkeitskriterium für die Diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 = z^4$ angeben kann. Darauf soll an anderer Stelle eingegangen werden.

In einem zweiten Teil dieser Arbeit werde ich unser Symbol so verallgemeinern, daß sich die eng miteinander verknüpften Fragen über e_{2^n} und $N\varepsilon$ restlos behandeln lassen.

---

[10]) Vgl. meine beiden ersten in [6]) genannten Arbeiten sowie die ebenfalls dort aufgeführte Arbeit von A. Scholz.

[11]) L. Rédei, Über einige Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper, dieses Journ. **174** (1935), S. 15—55.

[12]) Vgl. [8]) und die Arbeit von A. Scholz in [6]).

Mit Hilfe unseres Symbols läßt sich endlich die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung $u^2 - dv^2 = -1$ auch in dem Falle untersuchen, wo d nicht quadratfrei ist [13]).

Den Herren H. Hasse und R. Kochendörffer bin ich für die freundliche Mühe, die sie sich mit meiner Arbeit gegeben haben, zu Dank verpflichtet. Herr Kochendörffer hat die historische Einleitung nach den Vorschlägen von Herrn Hasse kürzer gestaltet; auch hat er die Arbeit sprachlich verbessert.

Bezeichnungen.

Lateinische, griechische bzw. deutsche Buchstaben bedeuten rationale Zahlen, algebraische Zahlen bzw. Ideale, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird oder ersichtlich ist. Insbesondere bedeuten p eine Primzahl, $\mathfrak{p}$ ein Primideal.

Die Primzahlen nehme ich in folgender Form an: $2, -3, 5, -7, -11, \ldots$ Ungerade Primzahlen haben dann immer die Gestalt $4l + 1$.

Den Exponenten von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{a}$ $(\neq 0)$ nenne ich die größte ganze Zahl n, für die $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^n}$ ganz für $\mathfrak{p}$ ist. In Zeichen: $\mathfrak{p}^n \,||\, \mathfrak{a}$.

„Ungerade" bzw. „gerade" heißt „zu 2 prim" bzw. „zu 2 nicht prim".

Relativdiskriminante, -norm und -spur werden durch $D_{K|k}$, $N_{K|k}$ und $S_{K|k}$ bezeichnet. Im Falle $k = R$ schreibe ich einfach D_K, N_K, S_K und lasse auch den Index K fort, wenn kein Mißverständnis entstehen kann. Es ist bequem, unter D_R die Zahl 1 zu verstehen.

In quadratischen Körpern bedeutet α' (bzw. $\mathfrak{a}'$) die zu α konjugierte Zahl (bzw. das zu $\mathfrak{a}$ konjugierte Ideal).

Das Symbol $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{a}}\right)$ gebrauche ich im folgenden in verändertem Sinne. Ist $\alpha \not\equiv_{(2)} 0$, $\alpha \not\equiv_{(2)} 1$, so soll $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{p}}\right)$ gleich $1, -1, 0$ sein, je nachdem $\mathfrak{p}$ in $k(\sqrt{\alpha})$ voll zerfällt, unzerlegbar bleibt oder verzweigt ist. Für $\alpha \equiv_{(2)} 1$ sei $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{p}}\right) = 1$. Für einen zusammengesetzten Nenner erkläre ich das Symbol mit der üblichen multiplikativen Eigenschaft. Wieder schreibe ich kurz $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ statt $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{a}}\right)$. Für ungerades $\mathfrak{a}$ hat dieses Symbol seinen früheren Sinn behalten. Für $\mathfrak{p} \mid 2$, $\mathfrak{p}^n \,||\, 2$ ist bekanntlich $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1, -1, 0$, je nachdem $\alpha \equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n+1}}$ bzw. $\alpha \not\equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n+1}}$ und $\alpha \equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n}}$ bzw. $\alpha \not\equiv_{(2)} 1 \pmod{\mathfrak{p}^{2n}}$ ist.

Unter einer Diskriminantenzahl verstehe ich die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers. Primdiskriminanten sind solche Diskriminantenzahlen, die nur einen Primteiler enthalten. Dies sind also $-4, 8, -8$ und die ungeraden Primzahlen. Die Diskriminantenzahlen stimmen mit den Produkten $d_1 d_2 \cdots d_t$ überein, wobei $d_1, d_2, \ldots, d_t$ paarweise relativ prime Primdiskriminanten sind. Die d_τ nenne ich Primdiskriminantenfaktoren der betreffenden Diskriminantenzahl. Sie sind von der Reihenfolge abgesehen immer bestimmt.

§ 1.

1. Es seien gegeben zwei Diskriminantenzahlen a_1, a_2 und eine *quadratfreie* ganze Zahl $a_3 > 1$.

Es bedeute k_1 den Körper $R(\sqrt{a_1})$ und $\mathfrak{a}_3$ ein Ideal in k_1, das aus a_3 entsteht, wenn jeder rationale Primfaktor von a_3 durch einen seiner Primidealteiler in k_1 ersetzt wird.

[13]) Vgl. hierzu: L. Rédei, Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$, dieses Journ. **173** (1935), S. 193—221.

Definition. *Gibt es eine Zahl α_2 in k_1, für die*

$$N_{k_1}\alpha_2 \underset{(2)}{=} a_2 \tag{1}$$

gilt, ist für den Körper $k_{12} = k_1(\sqrt{\alpha_2})$

$$N_{k_1}(D_{k_{12}|k_1}) = a_2, \tag{2}$$

kann weiter ein Paar α_2, $\mathfrak{a}_3$ so gewählt werden, daß

$$\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right) \tag{3}$$

von Null verschieden ist, ist dann endlich der Wert von (3) *von der besonderen Wahl von α_2, $\mathfrak{a}_3$ unabhängig, so soll dieser, allein von a_1, a_2, a_3 abhängige Wert mit $\{a_1, a_2, a_3\}$ bezeichnet werden.*

Existiert also das Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$, so ist sein Wert $+1$ oder -1.

Aus formalen Gründen erweitern wir die Definition auch auf den Fall, daß die Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ zugelassen werden: Besteht nämlich wenigstens eine dieser Gleichungen, so soll dem betreffenden Symbol der Wert 1 beigelegt werden. Außerdem fassen wir das Symbol im multiplikativen Sinne auf, indem wir in a_1, a_2, a_3 beliebige von Null verschiedene rationale Quadratzahlen als gleichgültige Faktoren zulassen. Endlich setzen wir noch $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2, -a_3\}$. Diese formalen Erweiterungen bezwecken nur, daß die Formeln einfacher werden. Meistens, insbesondere überall in diesem Paragraphen, sollen a_1, a_2, a_3 nur im ursprünglichen Sinne gebraucht werden. Später werde ich auf Abweichungen besonders aufmerksam machen.

2. Um zu untersuchen, wann das Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert, brauchen wir einige Vorbereitungen, von denen wir auch später noch Gebrauch zu machen haben. Ich behaupte folgendes:

Genügt α_2 den Bedingungen (1) und (2), so genügt

$$\alpha_1 = S_{k_1}\alpha_2 + 2\sqrt{N_{k_1}\alpha_2} = (\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_2'})^2 \tag{4}$$

den durch Vertauschung von a_1 mit a_2 aus (1) und (2) entstehenden Bedingungen.

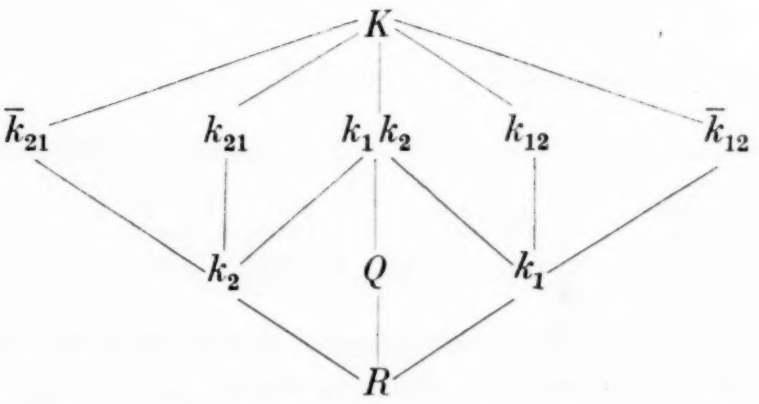
Es bezeichne k_2 den Körper $R(\sqrt{a_2})$. Wegen (1) gehört α_1 zu k_2. Es ist weiter $N_{k_2}\alpha_1 = (S_{k_1}\alpha_2)^2 - 4N_{k_1}\alpha_2 = (\alpha_2 - \alpha_2')^2 \underset{(2)}{=} a_1$, wie behauptet. Weiter ist nach (4)

$$\alpha_1\alpha_2 = (\alpha_2 + \sqrt{N_{k_1}\alpha_2})^2, \tag{5}$$

wobei der Klammerausdruck eine Zahl im zusammengesetzten Körper k_1k_2 ist.

Ist nun $a_1 = a_2$, so ist $k_1 = k_2 = k_1k_2$, also nach (5) $k_{12} = k_1(\sqrt{\alpha_2}) = k_1(\sqrt{\alpha_1})$. Dann besteht (2) auch für α_1 (statt α_2), und somit ist in diesem Falle unsere Behauptung bewiesen.

Für $a_1 \neq a_2$ schließe ich ähnlich wie Reichardt [7]). Ich betrachte folgendes Körperschema:



Hier ist $Q = R(\sqrt{a_1a_2})$, $k_{21} = k_2(\sqrt{\alpha_1})$, $\bar{k}_{12} = k_1(\sqrt{\alpha_2'})$, $\bar{k}_{21} = k_2(\sqrt{\alpha_1'})$, $K = R(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{\alpha_2})$.

Da K nach (1) Normalkörper ist und da (5) gilt, bestehen die durch die Striche angedeuteten Enthaltenseinsbeziehungen. K ist nicht abelsch, denn sonst müßte auch der Teilkörper k_{12} galoissch sein und wegen (1) $\sqrt{a_2}$ enthalten, was offenbar nicht der Fall ist. Da K vom achten Grade ist, kann seine galoissche Gruppe nur die Diedergruppe achter Ordnung oder die Quaternionengruppe sein. Diese haben acht bzw. vier echte Untergruppen. Es kommt also nur die Diedergruppe in Frage. Es ist zugleich auch klar, daß in obigem Schema schon alle Enthaltenseinsbeziehungen angegeben worden sind.

Es ist $K \mid k_1$ vom vierten Grade, abelsch und nicht zyklisch; somit ist nach der Führerdiskriminantenformel [14]) der Klassenkörpertheorie

$$D_{K|k_1} = D_{k_1k_2|k_1} \cdot D_{k_{12}|k_1} \cdot D_{\bar{k}_{12}|k_1}.$$

Die beiden letzten Faktoren sind konjugiert in k_1, und daher ist

$$D_{K|k_1} = D_{k_1k_2|k_1} \cdot N_{k_1}(D_{k_{12}|k_2}).$$

Ebenso ist

$$D_{K|k_2} = D_{k_1k_2|k_2} \cdot N_{k_2}(D_{k_{21}|k_2}).$$

Nach Hilberts Relativdiskriminantenformel gilt

$$(D_{k_1k_2} =)\ a_1^2 N_{k_1}(D_{k\,k_2|k_1}) = a_2^2 N_{k_2}(D_{k_1k_2|k_2})$$

und

$$(D_K =)\ a_1^4 N_{k_1}(D_{K|k_1}) = a_2^4 N_{k_2}(D_{K|k_2}).$$

Da immer $N_k(N_k \ldots) = (N_k \ldots)^2$ ist, erhalten wir aus den letzten vier Gleichungen

$$a_1^2 (N_{k_1}(D_{k_{12}|k_1}))^2 = a_2^2 (N_{k_2}(D_{k_{21}|k_2}))^2.$$

Mit Rücksicht auf (2) folgt daraus $N_{k_2}(D_{k_{21}|k_2}) = a_1$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

3. Wir beweisen jetzt folgendes: *Es existiert dann und nur dann ein α_2, das den Bedingungen* (1) *und* (2) *genügt, wenn*

(6) a_1 *und* a_2 *nicht beide negativ sind,*

(7) a_1 *und* a_2 *nicht beide gerade sind,*

(8) $$\left(\frac{a_i}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_1 a_2;\ p \nmid a_i,\ i = 1 \text{ oder } 2),$$

(9) $$\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid (a_1, a_2)).$$

Zunächst sei k ein beliebiger Zahlkörper, α eine Zahl in k, so daß $K = k(\sqrt{\alpha})$ vom Grade 2 über k ist. Es sei weiter $\mathfrak{l} = \mathfrak{L}^2$, wobei $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{L}$ gerade Primideale in k bzw. K sind. Es sei endlich $u = 0$ oder 1, je nachdem der Exponent von $\mathfrak{l}$ in α gerade oder ungerade ist. Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{l}^1 \mid\mid 2$, so ist $\mathfrak{l}^{2+u} \mid\mid D_{K|k}$.

(b) Ist $\mathfrak{l}^2 \mid\mid 2$ und $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$, so ist $\mathfrak{l}^{4+u} \mid\mid D_{K|k}$.

Es kommt bei α auf einen von Null verschiedenen Quadratfaktor nicht an, und daher können wir annehmen, daß genau $\mathfrak{l}^u \mid\mid \alpha$ gilt. Es sei Λ eine Zahl in K mit $\mathfrak{L}^1 \mid\mid \Lambda$. Es ist $\Lambda = \xi + \eta\sqrt{\alpha}$, wobei ξ, η Zahlen aus k sind. Dann ist $\bar{\Lambda} = \xi - \eta\sqrt{\alpha}$ die zu Λ

---

[14]) Vgl. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper I, Jahresbericht der D. M. V. **35** (1926), S. 1—55, Satz 16.

Teil Ia (ebenda **36** (1927), S. 233—311) und Teil II (ebenda, Ergänzungsband VI (1930)) werden im folgenden mit Bericht Ia und Bericht II angeführt.

in bezug auf k konjugierte Zahl. Da $\mathfrak{L}$ auch ein Teiler von $\overline{\Lambda}$ ist, folgt $\mathfrak{L} \mid 2\xi$, $\mathfrak{L}^2 \mid \xi^2 - \alpha\eta^2$, d. h. $\mathfrak{l} \mid 2\xi$, $\mathfrak{l} \mid \xi^2 - \alpha\eta^2$. Es sei v der Exponent von $\mathfrak{L}$ in $\frac{\overline{\Lambda}}{\Lambda} - 1 = \frac{-2\eta\sqrt{\alpha}}{\Lambda}$. Dann gilt $\mathfrak{L}^{1+v} \mid\mid 2\eta\sqrt{\alpha}$ und wegen $\mathfrak{L}^u \mid\mid \sqrt{\alpha}$ auch $\mathfrak{L}^{1+v-u} \mid\mid 2\eta$. Im Falle (a) folgt noch $\mathfrak{l}^0 \mid \xi$, $\mathfrak{l}^0 \mid \eta$ (d. h. ξ und η ganz für $\mathfrak{l}$), $\mathfrak{l}^0 \mid\mid \eta$, $1 + v = 2 + u$. Im Falle (b) ist $\mathfrak{l}^{-1} \mid \xi$, $\mathfrak{l}^{-1} \mid \eta$. Die Möglichkeit $\mathfrak{l}^{-1} \mid\mid \eta$ scheidet aus wegen $\mathfrak{l} \mid \xi^2 - \alpha\eta^2$, $\alpha \underset{(2)}{\not\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$. Es ist also $\mathfrak{l}^0 \mid \eta$, $\mathfrak{l}^0 \mid\mid \eta$, $1 + v = 4 + u$. Damit sind (a) und (b) bewiesen [15]).

Ich nehme nun die Existenz eines die Bedingungen (1) und (2) befriedigenden α_2 an.

Aus (1) folgt sogleich (6).

Um (7) zu beweisen, nehme ich im Gegensatz dazu $2 \mid a_1$, $2 \mid a_2$ an. Wäre $2^2 \mid\mid a_1$, $2^2 \mid\mid a_2$, so wäre $a_1 = -4ab$, $a_2 = -4ac$, wobei a, b, c ganz und ungerade sind mit der Bedingung $a \equiv b \equiv c \pmod 4$. Andrerseits besteht wegen (1) eine Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \qquad (z \neq 0);$$

das ergäbe aber einen Widerspruch. Da wegen **2** die Reihenfolge von a_1 und a_2 bei diesem Beweis gleichgültig ist, dürfen wir weiter $2^3 \mid a_2$ annehmen. Wegen $2 \mid a_1$ ist $2 = \mathfrak{l}^2$, wo $\mathfrak{l}$ ein Primideal in k_1 ist. Nach (1) ist der Exponent von $\mathfrak{l}$ in α_2 ungerade, also ist $\alpha_2 \underset{(2)}{\not\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{l}^3}$ (sogar schon mod $\mathfrak{l}$). Durch Anwendung von (b) auf $k_{12} \mid k_1$ (statt $K \mid k$) entsteht $\mathfrak{l}^4 \mid D_{k_{12}|k_1}$. Dies widerspricht (2), also ist (7) bestätigt.

Der sich auf ungerades p beziehende Teil von (8) und die volle Behauptung (9) folgen sogleich aus (1). Es ist mithin nur noch im Falle $2 \mid a_1 a_2$ die Gleichung (8) für $p = 2$ zu beweisen. Wegen (7) und **2** läßt sich $2 \mid a_1$, $2 \nmid a_2$ annehmen. Es ist dann $2 = \mathfrak{l}^2$, wobei $\mathfrak{l}$ ein Primideal in k_1 ist. Wegen (2) ist $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{l}}\right) \neq 0$. Nach Übergang zu den konjugierten Größen ist $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha_2'}{\mathfrak{l}}\right)$, und somit ist $\left(\frac{\alpha_2 \alpha_2'}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ [16]), d. h. $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{l}}\right) = 1$ wegen (1). Da die Diskriminante von $R(\sqrt{a_2})$ ungerade ist, entsteht durch Nennertransformation [17]) $\left(\frac{a_2 \mid R}{2}\right) = 1$. Damit haben wir auch den noch fehlenden Teil von (8) bewiesen.

Nehmen wir jetzt umgekehrt das Bestehen der Bedingungen (6) bis (9) an. Um die Existenz eines den Bedingungen (1) und (2) genügenden α_2 zu beweisen, können wir uns nach **2** wieder auf den Fall $2 \nmid a_2$ beschränken. Bekanntlich ist jetzt die Gleichung

$$x^2 - a_1 y^2 - a_2 z^2 = 0 \tag{10}$$

lösbar mit den Bedingungen x, y, z ganz, $(x, y, z) = 1$, $2 \mid y$, $x + y\sqrt{a_1} \equiv 1 \pmod 4$. Ich behaupte, daß $\alpha_2 = x + y\sqrt{a_1}$ den Bedingungen (1) und (2) genügt.

---

[15]) Bericht Ia, S. 251, Formel (6).

[16]) Offenbar ist $\left(\frac{\alpha \mid k}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{\beta \mid k}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta \mid k}{\mathfrak{l}}\right)$, wenn $\mathfrak{l}$ ein Primideal ersten Grades in k ist und die Faktoren auf der linken Seite von Null verschieden sind.

[17]) Bericht II, S. 52, Formel (8). Diese Formel läßt sich im Falle eines geraden Nenners nicht ohne weiteres anwenden, da dann unser Symbol $\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)$ kein zweites Potenzrestsymbol ist. Ist aber $\mathfrak{t}$ über die dortigen Bedingungen hinaus ein gerades Primideal in Ω vom Relativgerade 1 in bezug auf k, so ist diese Formel auch für unser Symbol $\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)$ gültig. Es ist dann nämlich $\mathfrak{r} = N_{\Omega|k}\,\mathfrak{t}$ ein Primideal in k, und es gelten die Kongruenzen $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{r}^n}$ und $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{t}^n}$ immer gleichzeitig. (Diese Kongruenzen sind natürlich in k bzw. in Ω zu verstehen.)

Aus (10) folgt nämlich sogleich (1). Wegen $\alpha_2 \equiv 1 \pmod 4$ ist weiter $D_{k_{12}|k_1}$ für $k_{12} = k_1(\sqrt{\alpha_2})$ ungerade. Es kann α_2 keinen rationalen Primteiler haben, und wegen (1) ist somit $\alpha_2 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{m}^2$, wobei $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{m}$ ganze Ideale in k_1 sind und $N_{k_1}\mathfrak{a}_2 = a_2$ gilt. Es besteht ferner die Beziehung [18]) $D_{k_{12}|k_1} = \mathfrak{a}_2$, und das bedeutet gerade die Richtigkeit von (2). Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

4. Im folgenden nehmen wir das Erfülltsein von (6) bis (9), d. h. die Existenz eines α_2 mit (1) und (2) an. Wir bemerken ausdrücklich, daß wegen des Falles $i = 1$ von (8) a_2 in k_1 in lauter Primideale ersten Grades zerfällt.

Es bedeute $\mathfrak{a}_2$ immer ein aus a_2 dadurch hervorgehendes Ideal, daß in der Primzahlzerlegung $a_2 = p_1^{r_1} \cdots p_i^{r_i}$ $(p_\varkappa \neq p_\lambda;\ \varkappa \neq \lambda)$ ein jedes $p_\varkappa$ durch einen seiner Primidealfaktoren in k_1 ersetzt wird. (Ich mache darauf aufmerksam, daß auch $\mathfrak{a}_3$ in **1** aus a_3 ähnlich wie $\mathfrak{a}_2$ aus a_2 entsteht. Die Erklärung von $\mathfrak{a}_3$ gestaltete sich einfacher, weil a_3 quadratfrei ist.) Dann ist $\mathfrak{a}_2$ ein Produkt aus lauter Primidealen ersten Grades in k_1; keine zwei davon sind konjugiert. Es ist

$$N_{k_1}\mathfrak{a}_2 = a_2. \tag{11}$$

Ich beweise nun: *Es ist* $D_{k_{12}|k_1}$ *in* (2) *ein* $\mathfrak{a}_2$.

Offenbar stimmen die ungeraden Primidealfaktoren von $D_{k_{12}|k_1}$ mit den Faktoren eines $\mathfrak{a}_2$ überein. Damit ist die Behauptung im Falle $2 \nmid a_2$ schon bewiesen, und auch im Falle $2 \mid a_2$ brauchen nur noch die geraden Primideale untersucht zu werden. In diesem Falle ist $2 = \mathfrak{l}\mathfrak{l}'$, wobei $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}'$ verschiedene Primideale in k_1 sind. Wegen (2) kann man $\mathfrak{l} \mid D_{k_{12}|k_1}$ annehmen. Es läßt sich also (a) aus **3** auf $k_{12} \mid k_1$ anwenden. Dadurch entsteht $\mathfrak{l}^{2+u} \parallel D_{k_{12}|k_1}$, wobei jetzt $2^{2+u} \parallel a_2$ ist. Aus (2) folgt gleichzeitig $\mathfrak{l}' \nmid D_{k_{12}|k_1}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

5. Die folgende Aussage fassen wir für spätere Zwecke möglichst allgemein: *Wenn* (1), (7) *und der Fall* $i = 1$ *von* (8) *gelten, so läßt sich* (2) *durch die* (*schwächere*) *Bedingung*

$$\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_2 \tag{2'}$$

ersetzen, wobei $\mathfrak{p}$ *alle Primideale aus* k_1 *durchläuft.* Das Zeichen „$\longleftrightarrow$“ soll „dann und nur dann, wenn“ bedeuten.

Bemerkung. Immer wenn die Existenz wenigstens eines α_2 feststeht, welches (1) und (2) befriedigt, wenn folglich auch (6) bis (9) gelten, werden wir nach diesem Satze alle solchen Zahlen α_2 aus den Bedingungen (1), (2′) (statt aus (1), (2)) bestimmen können. Im Sinne der Behauptung kann man sogar die Existenz eines solchen α_2 mit Hilfe von (1), (2′) immer dann entscheiden, wenn (7) und der Fall $i = 1$ von (8) bestehen. Hätten wir diese letzten Bedingungen von vornherein angenommen, hätten wir uns also auf solche Fälle beschränkt, wo a_1, a_2 nicht beide gerade sind und alle Primfaktoren von a_2 in k_1 in lauter Primideale ersten Grades zerfallen, so hätten wir schon am Anfang (2) durch (2′) ersetzen können. Dadurch hätte sich manches einfacher gestaltet, jedoch hätten unsere Betrachtungen an Vollständigkeit und an Klarheit der Begriffe verloren.

Die eine Hälfte der Behauptung besagt wegen **3** einfach, daß aus (1) und (2) das Bestehen von (2′) folgt, und das trifft nach **4** wirklich zu.

Nehmen wir umgekehrt (1), (2′), (7) und den Fall $i = 1$ von (8) an. Die andere Hälfte der Behauptung besteht darin, daß dann auch (2) erfüllt sein muß. Wegen (2′) enthält $D_{k_{12}|k_1}$ dieselben Primideale wie $\mathfrak{a}_2$. Es ist sogar die Multiplizität für alle Primideale dieselbe, d. h. $D_{k_{12}|k_1} = \mathfrak{a}_2$. Das ist für die ungeraden Primideale klar [18]), und auch für den nur bei $2 \mid a_2$ in Frage kommenden einzigen geraden Primidealfaktor von $\mathfrak{a}_2$

[18]) Bericht Ia, S. 250, Formel (2).

ist es wegen (7), wonach nämlich 2 in k_1 nicht verzweigt ist, eine unmittelbare Folgerung aus (a) in **3**. Es besteht dann wegen des Falles $i = 1$ von (8) auch (2). Damit ist die Behauptung bewiesen.

6. Wir nehmen wieder die Gültigkeit von (6) bis (9) an.

Durch (2′) ist einem jeden α_2 aus **1** ein bestimmtes $\mathfrak{a}_2$ zugeordnet, welches wir das zu α_2 gehörende Ideal nennen. Umgekehrt sagen wir auch, daß α_2 zu $\mathfrak{a}_2$ gehört. Man könnte sich natürlich denken, daß nicht zu jedem $\mathfrak{a}_2$ ein α_2 gehört, aber in **7** beweisen wir, daß dies nicht der Fall ist. Hier beweise ich folgendes: *Gehört α_2 zu $\mathfrak{a}_2$, so haben alle zu diesem $\mathfrak{a}_2$ gehörenden Zahlen die Form $a\alpha_2\gamma^2$, wobei γ eine beliebige, von Null verschiedene Zahl in k_1 und a die Zahl 1 oder ein beliebiges Produkt aus verschiedenen Primdiskriminantenfaktoren von a_1 ist.*

Es gehöre nämlich neben α_2 auch α_2^* zu $\mathfrak{a}_2$. Ich setze $\omega = \alpha_2^{-1}\alpha_2^*$. Da (1), (2′) für α_2 und α_2^* bestehen, ist $N_{k_1}\omega \underset{(2)}{\equiv} 1$ und $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in k_1, ausgenommen höchstens $\mathfrak{p} = (2, \mathfrak{a}_2)$ für $2 \mid a_2$. In diesem Falle ist $2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}' \nmid \mathfrak{a}_2$, also $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 0$. Daraus folgt $\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Letzteres gilt dann wegen $N_{k_1}\omega \underset{(2)}{\equiv} 1$ auch für ω statt ω', und somit ist die erwähnte Ausnahme nicht möglich. Es ist also entweder $\omega \underset{(2)}{\equiv} 1$, oder der Körper $k_1(\sqrt{\omega}) \mid k_1$ ist unverzweigt vom zweiten Grade. In diesem Falle ist bekanntlich $\sqrt{\omega} = \alpha + \beta\sqrt{a}$, wobei a eine ungerade Diskriminantenzahl und Teiler von a_1 ist; α, β sind Zahlen in k_1. Durch Quadrieren entsteht $\alpha\beta = 0$, also $\omega = a\beta^2$. Es muß somit $\alpha_2^* = \omega\alpha_2$ unter den genannten Zahlen sein.

Ist umgekehrt $\alpha_2^* = a\alpha_2\gamma^2$ wie oben angegeben, so läßt sich wegen $a = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{a^2}{(\sqrt{a_1})^2}$ annehmen, daß a ungerade ist. Da a ein Idealquadrat in k_1 und $a \equiv 1 \pmod 4$ ist, so besteht (2′) auch für α_2^*. Ähnliches gilt auch von (1), womit die Behauptung bewiesen ist.

7. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in k_1, so soll $S_p\mathfrak{a}$ das Ideal bezeichnen, welches aus $\mathfrak{a}$ entsteht, wenn man die in $\mathfrak{a}$ vorkommenden, in p aufgehenden Primidealfaktoren durch die konjugierten ersetzt. Es sei weiter $S_pS_q \cdots S_t = S_{pq\ldots t}$; S_1 bezeichne die identische Substitution.

Jedes $\mathfrak{a}_2$ entsteht aus einem speziellen in der Form $S_m\mathfrak{a}_2$, wenn m einen zu a_1 primen, rationalen, quadratfreien Teiler von a_2 bedeutet. Für ein solches m soll d_m immer das Produkt derjenigen Primdiskriminantenfaktoren von a_2 bedeuten, die mit m einen gemeinsamen Teiler haben; es sei ferner $d_1 = 1$. Dann behaupte ich folgendes: *Gehört α_2 zu $\mathfrak{a}_2$, so gehört $d_m\alpha_2$ zu $S_m\mathfrak{a}_2$.* Hierdurch und durch **6** sind alle α_2 aus **1** gegeben, und man sieht, daß zu jedem $\mathfrak{a}_2$ ein α_2 gehört.

Benutzt man wieder für α_2 die Erklärung durch (1) und (2′), so sieht man die Richtigkeit der Behauptung im Falle $2 \nmid m$ aus $d_m = \pm m$, $d_m \equiv 1 \pmod 4$ unmittelbar ein.

Im Falle $2 \mid m$ setze ich $a = (a_1, a_2)$, $a \equiv 1 \pmod 4$, $ab = a_2$. Es bezeichne noch m_0 das Produkt derjenigen verschiedenen Primfaktoren von b, die in m nicht aufgehen. Offenbar gehört α_2' zu $\mathfrak{a}_2'$, und statt α_2' kann hier wegen (1) und **6** nacheinander $a_2\alpha_2$, $aa_2\alpha_2$, $b\alpha_2$ genommen werden. Andrerseits ist $S_m\mathfrak{a}_2 = S_{m_0}\mathfrak{a}_2'$, und wegen $2 \nmid m_0$ gehört somit $(d_{m_0}b\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv}) d_m\alpha_2$ zu $S_m\mathfrak{a}_2$.

8. Das zu α_2 gehörende Ideal werde wieder mit $\mathfrak{a}_2$ bezeichnet. Es ist klar, daß (3) dann und nur dann von Null verschieden ist, wenn $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$ gilt. Andrerseits sieht man, daß es für ein beliebiges $\mathfrak{a}_2$ dann und nur dann ein $\mathfrak{a}_3$ mit $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$ gibt, wenn jeder Teiler p von (a_2, a_3) in k_1 voll zerfällt, d. h. $\left(\frac{a_1}{p}\right) = 1$ ist. Diese Bedingung läßt

sich wegen des Falles $i = 1$ von (8) durch $p \nmid a_1$ ersetzen. Wir haben also folgendes Resultat erhalten: *Es ist* (3) *dann und nur dann eines von Null verschiedenen Wertes fähig, wenn*

$$(a_1, a_2, a_3) = 1. \tag{12}$$

Es ist nach den vorangegangenen Betrachtungen auch klar, daß es beim Bestehen von (12) zu jedem $\mathfrak{a}_2$ ein solches $\mathfrak{a}_3$ gibt, für welches $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$ gilt.

Im folgenden setzen wir (12) voraus und wählen $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ immer relativ prim.

9. Jetzt werden wir sehen, daß es genügt, solche Fälle zu betrachten, in denen a_3 in k_1 in lauter Primideale ersten Grades zerfällt.

Wir betrachten eine ganze Zahl m mit $(a_2, m) = 1$. Nach (2) gilt um so mehr $(D_{k_3|k_1}, m) = 1$, woraus wir nach Zählertransformation [19])

$$\left(\frac{\alpha_2 \mid k_1}{m}\right) = \left(\frac{N_{k_1}\alpha_2 \mid R}{m}\right) = \left(\frac{a_2}{m}\right)$$

gewinnen. Hieraus folgern wir: *Ist* $\left(\frac{a_1}{p}\right) = -1$ *und* $p \nmid a_3$, *existiert ferner mindestens eins der beiden Symbole* $\{a_1, a_2, pa_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$, *so existiert auch das andere, und es gilt*

$$\{a_1, a_2, pa_3\} = \left(\frac{a_2}{p}\right)\{a_1, a_2, a_3\}. \tag{13}$$

Es muß nämlich wegen $\left(\frac{a_1}{p}\right) = -1$ und wegen (8) auch $(a_2, p) = 1$ sein. Nimmt man weiter pa_3 statt a_3, so tritt $p\mathfrak{a}_3$ an die Stelle von $\mathfrak{a}_3$. Alle Zahlen α_2 in (3) bleiben aber für beide Symbole in (13) dieselben, und somit ist die Behauptung nach der vorigen Bemerkung bewiesen.

10. Im Anschluß an (13) definieren wir folgendes: *Das Symbol* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *heißt rein, wenn* a_3 *in* k_1 *in lauter Primideale ersten Grades zerfällt, d. h. wenn*

$$\left(\frac{a_1}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_3;\ p \nmid a_1). \tag{14}$$

Selbstverständlich ist diese Definition so zu verstehen, daß ein Symbol $\{a, b, c\}$ auch dann rein zu nennen ist, wenn $a \underset{(2)}{\equiv} a_1$, $b \underset{(2)}{\equiv} a_2$, $c \underset{(2)}{\equiv} \pm a_3$ gilt und $\{a_1, a_2, a_3\}$ rein ist. Es ist außerdem zweckmäßig, auch dann, wenn wenigstens eine der Gleichungen $a \underset{(2)}{\equiv} 1$, $b \underset{(2)}{\equiv} 1$, $c \underset{(2)}{\equiv} \pm 1$ besteht, von einem reinen Symbol zu sprechen, welches offenbar den Wert 1 hat.

Nach (13) lassen sich unsere Symbole auf reine zurückführen. Deshalb wollen wir im folgenden auch (14) voraussetzen. Dann ist $N_{k_1}\mathfrak{a}_3 = a_3$ (vgl. (11)).

11. Wir wollen nun untersuchen, wann (3) bei gegebenen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ für alle zu $\mathfrak{a}_2$ gehörenden Zahlen α_2 den gleichen Wert hat. Nach **6** kann man die Bedingung hierfür in folgender Form angeben:

$$\left(\frac{p}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1 \qquad (p \mid a_1;\ p \neq 2). \tag{15}$$

Im Falle $2 \mid a_1$ hätte man hier im Zähler auch den geraden Primdiskriminantenfaktor von a_1 zulassen müssen, doch wäre diese Gleichung wegen

$$\left(\frac{a_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{(\sqrt{a_1})^2}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$$

---

[19]) Bericht II, S. 73, Satz IV. Auch diese Formel ist auf unser Symbol $\left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)$ im Falle eines geraden Nenners nicht ohne weiteres anwendbar. In allen Fällen aber, wo wir diese Formel anwenden, ist stets leicht zu bestätigen, daß dies zulässig ist.

eine Folge der übrigen[20]). (Ebenso könnte man in (15) auch im Falle $2 \nmid a_1$ eine beliebige Gleichung fortlassen.) Aus (15) werden wir folgendes Ergebnis erhalten: *Bei gegebenen* $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *ist der Wert von* (3) *für alle zu* $\mathfrak{a}_2$ *gehörenden* α_2 *dann und nur dann derselbe, wenn*

$$\left(\frac{a_3}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_1;\ p \nmid 2a_3), \tag{16}$$

$$\left(\frac{-a_1 a_3}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid (a_1, a_3);\ p \neq 2). \tag{16'}$$

Für die Diskriminante p von $R(\sqrt{p})$ ist im Falle $p \nmid a_3$ nämlich $(p, \mathfrak{a}_3) = 1$, und somit ersetzt in (15) die Nennertransformation von k_1 zu R das Ideal $\mathfrak{a}_3$ durch a_3. Mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes in R ergibt sich dann (16).

Im Falle $p \mid a_3$ setzen wir $(p, \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{p}$. Schreibt man (15) zuerst in der Form

$$\left(\frac{p}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{a_1 p}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3}\right) = 1,$$

so lassen sich die Nenner auf ähnlichem Wege durch p bzw. pa_3 ersetzen, wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_3$ prim bzw. kernprim zu den Diskriminanten $\frac{a_1}{p}$, p von $R(\sqrt{a_1 p})$ und $R(\sqrt{p})$ sind. Durch Anwendung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes geht der zweite Faktor über in $\left(\frac{-pa_3}{p}\right)$. So entsteht (16'), und die Behauptung ist bewiesen.

Im folgenden setzen wir noch (16) und (16') voraus. Dann kann (3) nur noch von dem zu α_2 gehörenden $\mathfrak{a}_2$ und von $\mathfrak{a}_3$ abhängen.

12. Wir nehmen ein beliebiges Paar $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. Indem wir in (3) immer ein zu $\mathfrak{a}_2$ gehörendes α_2 eingesetzt denken, erscheint (3) wegen **11** als Funktion von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ allein. Wir wollen untersuchen, wann (3) auch nicht von der besonderen Wahl von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ abhängt. Auf diese Weise werden sich die Fälle ergeben, in denen $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert.

Alle Paare $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ entstehen ersichtlich aus einem besonderen in der Form $S_m\mathfrak{a}_2$, $S_m\mathfrak{a}_3$, wobei m alle quadratfreien, ganzen rationalen Zahlen durchläuft. Dabei schöpfen die Zahlen m mit $m \mid a_2 a_3$ und $(m, a_1) = 1$ schon alle Möglichkeiten aus. Da sich (3) beim Übergang zu den konjugierten nicht ändert, sehen wir, daß es genügt, von zwei konjugierten Paaren $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$ immer nur das eine zu betrachten. Das bedeutet aber, daß wir m weiter durch $2 \nmid m$ einschränken dürfen; denn $S_m\mathfrak{a}_2$, $S_m\mathfrak{a}_3$ und $S_{m_1}\mathfrak{a}_2$, $S_{m_1}\mathfrak{a}_3$ sind immer konjugierte Paare, wenn mm_1 gleich dem Produkt der verschiedenen, in a_1 nicht enthaltenen Primfaktoren von $a_2 a_3$ ist, und es ist ja mindestens eine der beiden Zahlen m, m_1 ungerade. Endlich genügt es, wenn für m nur Primzahlen genommen werden; denn bleibt (3) für jedes Paar $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ beim Übergang zu $S_m\mathfrak{a}_2$, $S_m\mathfrak{a}_3$ mit $m = a$ und $m = b$ unverändert, so trifft dasselbe auch mit $m = ab$ zu wegen $S_a S_b = S_{ab}$.

Für eine Primzahl $m = p$ mit $p \nmid 2a_1$ ist nun $S_p\mathfrak{a}_3 \underset{(2)}{=} \mathfrak{a}_3$ oder $S_p\mathfrak{a}_3 \underset{(2)}{=} p\mathfrak{a}_3$, je nachdem $p \nmid a_3$ oder $p \mid a_3$ gilt. Andererseits läßt sich für dieselben p nach **7** aus einem zu $\mathfrak{a}_2$ gehörenden α_2 ein zu $S_p\mathfrak{a}_2$ gehörendes angeben, nämlich α_2 oder $p\alpha_2$, je nachdem $p \nmid a_2$ oder $p \mid a_2$ gilt. Dann läßt sich (3) für ein solches Paar $S_p\mathfrak{a}_2$, $S_p\mathfrak{a}_3$ in der Form

$$\left(\frac{p\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right)(p \mid a_2;\ p \nmid a_3) \text{ bzw. } \left(\frac{\alpha_2}{p\mathfrak{a}_3}\right)(p \nmid a_2;\ p \mid a_3) \text{ bzw. } \left(\frac{p\alpha_2}{p\mathfrak{a}_3}\right)(p \mid (a_2, a_3))$$

[20]) Für spätere Anwendungen bemerke ich folgendes: Im Falle $2 \mid a_1$ bezeichne d den geraden Primdiskriminantenfaktor von a_1. Wie gesagt, folgt aus der obigen Gleichung und aus (15) auch $\left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$. Ist außerdem $2 \nmid a_3$, so folgt durch Nennertransformation auch $\left(\frac{d}{a_3}\right) = 1$. Diese Bemerkung gilt stets, wenn $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert und rein ist.

annehmen. Es ist also (3) dann und nur dann von der besonderen Wahl von $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ unabhängig, wenn diese Symbole mit (3) multipliziert den Wert 1 ergeben, d. h. wenn

$$(17) \qquad \left(\frac{p}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1 \qquad (p \mid a_2;\ p \nmid 2a_1a_3),$$

$$(17') \qquad \left(\frac{\alpha_2}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_3;\ p \nmid 2a_1a_2),$$

$$(17'') \qquad \left(\frac{p\alpha_2}{p\mathfrak{a}_3}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1^{21}) \qquad (p \mid (a_2, a_3);\ p \neq 2).$$

Daraus werden wir folgendes Ergebnis erhalten: *Es hängt* (3) *dann und nur dann auch von der besonderen Wahl von* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$ *nicht ab, wenn*

$$(18) \qquad \left(\frac{a_3}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_2;\ p \nmid 2a_1a_3),$$

$$(18') \qquad \left(\frac{a_2}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid a_3;\ p \nmid 2a_1a_2),$$

$$(18'') \qquad \left(\frac{-a_2a_3}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid (a_2, a_3);\ p \neq 2).$$

Eine Nennertransformation ersetzt nämlich in (17) $\mathfrak{a}_3$ durch a_3. Durch das quadratische Reziprozitätsgesetz entsteht (18).

Wegen (1) ergibt (17′) durch Zählertransformation die Gleichung (18′).

Zur Umformung von (17″) setze ich $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $p \mid \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$, wobei dann noch $\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{a}_2$ gilt. Dann entsteht aus der linken Seite von (17″)

$$\left(\frac{p\alpha_2}{\mathfrak{p}'\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{p\alpha_2}{\mathfrak{p}'}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{p\alpha_2\alpha_2'}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{pa_2}{p}\right)\left(\frac{p}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{pa_2}{p}\right)\left(\frac{p}{pa_3}\right) = \left(\frac{pa_2}{p}\right)\left(\frac{-pa_3}{p}\right).$$

Es geht also (17″) in (18″) über, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

13. Für die Existenz eines reinen Symbols $\{a_1, a_2, a_3\}$ haben wir als Bedingungen (6), (7), (8), (9), (12), (14), (16), (16′), (18), (18′), (18″) aufgestellt. Abgesehen von (6), (7), (12) haben sie alle ähnliche Gestalt, nämlich $\left(\frac{a_j}{p}\right) = 1$ und $\left(\frac{-a_ia_j}{p}\right) = 1$, wobei $j = 1, 2, 3$ bzw. $1 \leqq i < j \leqq 3$. So entsteht der folgende Satz, der nach (13) auch die nicht reinen Symbole umfaßt:

Satz 1. *Sind* a_1, a_2 *Diskriminantenzahlen und ist* $a_3 (> 1)$ *eine quadratfreie, ganze rationale Zahl, so existiert das Symbol* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *und es ist rein, wenn* $(a_1, a_2, a_3) = 1$ *ist, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen* a_1, a_2 *positiv und wenigstens eine ungerade ist und wenn außerdem noch für* $p \mid a_1a_2a_3$

$$(19) \qquad \left(\frac{a_j}{p}\right) = 1 \qquad (p \nmid a_j;\ j = 1, 2, 3),$$

$$(20) \qquad \left(\frac{-a_ia_j}{p}\right) = 1 \qquad (p \mid (a_i, a_j);\ 1 \leqq i < j \leqq 3)$$

gilt, wobei jedoch $p = 2$ *für* $j = 3$ *auszuschließen ist*[22]).

---

[21]) Man hätte oben auch die geraden Werte von m zulassen können. Man bekommt dann im Falle $2 \mid a_2$, $2 \nmid a_3$ der Formel (17) entsprechend $\left(\frac{d}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$, wobei d den geraden Primdiskriminantenfaktor von a_2 bedeutet. Daraus entsteht auch $\left(\frac{d}{a_3}\right) = 1$. Sonst gelten ähnliche Bemerkungen wie in [20]).

[22]) Im Falle $2 \nmid a_1a_2a_3$ lauten (19) und (20) einfach so: a_i ist eine Norm in

$$R(\sqrt{a_j}) \quad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j).$$

Ist weiter m (>1) eine quadratfreie ganze Zahl, für deren Primfaktoren p die Beziehung $\left(\frac{a_1}{p}\right) = -1$ besteht, so existiert auch $\{a_1, a_2, ma_3\}$. Dieses Symbol ist nicht rein. Es gilt

$$\{a_1, a_2, ma_3\} = \left(\frac{a_2}{m}\right)\{a_1, a_2, a_3\},$$

wobei auch $a_3 = 1$ zuzulassen ist, so daß sich dann die rechte Seite auf den ersten Faktor reduziert.

In weiteren Fällen existert das Symbol nicht, abgesehen von den in **1** *besprochenen formalen Erweiterungen.*

14. Es genügt nach Satz 1, nur reine Symbole zu betrachten. Obwohl die Definition in **1** auch gleich den Weg zur Berechnung des Symbols angibt, ist es doch nützlich, folgendes zu bemerken: *Existiert ein reines Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$, so läßt es sich in folgender Weise berechnen: Man nimmt eine ganzzahlige Lösung der Gleichung*

$$x^2 - a_1 y^2 - a_2 z^2 = 0 \tag{21}$$

mit den Bedingungen $(x, y, z) = 1$, $2 \nmid x$, $2 \mid yz$ und wählt das Vorzeichen von x gemäß $x \equiv a_1 a_2 yz + 1 \pmod 4$. Wird dann $\alpha = x + y\sqrt{a_1}$ oder $2(x + y\sqrt{a_1})$ gesetzt, je nachdem $2 \mid y$ oder $2 \nmid y$ ist, und ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ in $R(\sqrt{a_1})$ mit der Norm a_3 so gewählt, daß $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) \neq 0$ ist, so ist

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)^{23}). \tag{22}$$

Die Gleichung (21) hat eine Lösung, wie wir schon bei (10) bemerkt haben. Im Falle $2 \mid y$ ist weiter $2 \nmid a_2$, $2 \nmid z$, $x \equiv a_1 y + 1 \pmod 4$, und somit besteht (22) nach der Definition in **1** und den Bemerkungen bei (10). Im Falle $2 \nmid y$ ist $2 \mid z$, woraus folgt, daß jetzt nach Vertauschung von a_1 und a_2 die Zahl $\beta = x + z\sqrt{a_2}$ an die Stelle von α_2 in **1** tritt. Wendet man **2** auf $\alpha_2 = \beta$ an, so entsteht gerade $\alpha_1 = 2(x + y\sqrt{a_1})$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 2.

15. Obwohl Satz 1 und **14** die Berechnung unseres Symbols in allen Fällen ermöglichen, wird es doch von Interesse sein, nach weiteren Eigenschaften dieses Symbols zu suchen. Dabei brauchen wir nur reine Symbole zu betrachten. Ich beweise folgenden

Satz 2. *Existiert ein reines Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$, so existiert auch $\{a_2, a_1, a_3\}$, dieses Symbol ist ebenfalls rein, und es gilt*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_1, a_3\}. \tag{23}$$

Da nach Satz 1 die Bedingungen für die Existenz eines reinen Symbols $\{a_1, a_2, a_3\}$ in a_1 und a_2 symmetrisch sind, so braucht nur noch (23) bewiesen zu werden.

Man kann $a_1 \neq a_2$ annehmen, da sonst (23) eine Identität ist. Ich setze wieder $k_i = R(\sqrt{a_i})$ $(i = 1, 2)$. Nach (19) zerfallen die Primfaktoren p von a_3 in den Körpern k_1 und k_2 in lauter Primideale ersten Grades. Weiter ist p wegen $(a_1, a_2, a_3) = 1$ nicht

---

[23]) Die wirkliche Berechnung von $\{a_1, a_2, a_3\}$ geht auf obigem Wege ziemlich schnell. Im Falle $2 \nmid a_1 a_2$ gibt es nämlich eine passende Lösung von (21), in der die absoluten Werte der Glieder auf der linken Seite unter der Schranke $4|a_1 a_2|$ bleiben, so daß man $|y| < 2|\sqrt{a_2}|$, $|z| < 2|\sqrt{a_1}|$ annehmen kann. Im Falle $2 \mid a_1 a_2$ gibt es eine Lösung von (21) derart, daß alle Glieder von Null verschieden sind und die absoluten Werte unter der Schranke $|a_1 a_2|$ liegen, wenn man nur verlangt, daß x, y, z rational und die Glieder in (21) ganz sind. Daraus erhält man aber leicht eine passende Lösung.

in beiden Körpern verzweigt. Es zerfällt p also auch in k_1k_2 in lauter Primideale ersten Grades.

Es sollen nun α_2, $\mathfrak{a}_3$ in **1** so gewählt werden, daß (3) nicht verschwindet. Dann ist

$$\left(\frac{\alpha_2 \mid k_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \{a_1, a_2, a_3\}. \tag{24}$$

Nach dem Obigen gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{A}_3$ in k_1k_2 mit $N_{k_1k_2|k_1}\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{a}_3$. Da mit $\mathfrak{a}_3$ auch $\mathfrak{A}_3$ prim zu $D_{k_{12}|k_1}$ ist, wobei wieder $k_{12} = k_1(\sqrt{\alpha_2})$ gesetzt worden ist, so entsteht durch Nennertransformation, mit Rücksicht auf (24)

$$\left(\frac{\alpha_2 \mid k_1k_2}{\mathfrak{A}_3}\right) = \left(\frac{\alpha_2 \mid k_1}{\mathfrak{a}_3}\right) = \{a_1, a_2, a_3\}. \tag{25}$$

Dabei ist offenbar $N_{k_1k_2}\mathfrak{A}_3 = a_3$.

Wieder bedeute α_1 die Zahl in (4). Ähnlich wie (25) gilt dann

$$\left(\frac{\alpha_1 \mid k_1k_2}{\mathfrak{B}_3}\right) = \{a_2, a_1, a_3\}, \tag{26}$$

wobei $\mathfrak{B}_3$ ein ganzes Ideal in k_1k_2 mit $N_{k_1k_2}\mathfrak{B}_3 = a_3$ ist. Nach (5) ist

$$\left(\frac{\alpha_1 \mid k_1k_2}{\mathfrak{B}_3}\right) = \left(\frac{\alpha_2 \mid k_1k_2}{\mathfrak{B}_3}\right). \tag{27}$$

Es ist klar, daß sich die Primidealfaktoren von $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ zu Paaren konjugierter zusammenfassen lassen. Ist $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ ein solches Paar mit $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{Q} \mid \mathfrak{B}_3$, so sind wegen (25), (26), (27)

$$\left(\frac{\alpha_2 \mid k_1k_2}{\mathfrak{P}}\right), \left(\frac{\alpha_2 \mid k_1k_2}{\mathfrak{Q}}\right)$$

von Null verschieden. Weiter führt ein geeigneter Übergang zu den konjugierten Idealen $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{P}$ über. Gleichzeitig tritt an die Stelle von α_2 eine Zahl β, die nur α_2 oder α_2' sein kann. In beiden Fällen ist nach (1) $\alpha_2\beta$ eine Quadratzahl in k_1k_2. Die betrachteten Symbole sind also sogar einander gleich, und somit ist auch das erste Glied in (25) gleich der rechten Seite von (27). Mit Rücksicht auf (26) ist (23) und somit Satz 2 bewiesen.

16. Ich beweise jetzt folgenden

Satz 3. *Das reine Symbol ist in allen drei Argumenten multiplikativ, d. h.*

$$\{a, a_2, a_3\}\{b, a_2, a_3\} = \{ab, a_2, a_3\}, \tag{28}$$

$$\{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\} = \{a_1, ab, a_3\}, \tag{28'}$$

$$\{a_1, a_2, a\}\{a_1, a_2, b\} = \{a_1, a_2, ab\}. \tag{28''}$$

Jede dieser Formeln gilt, sobald zwei darin vorkommende Symbole existieren und rein sind; das dritte Symbol existiert dann ebenfalls und ist rein[24]). Natürlich können in ab Quadratfaktoren auftreten, die gemäß den Verabredungen in **1** gleichgültig sind.

Nach Satz 2 ist jede der beiden Gleichungen (28) und (28′) eine Folge der andern. Daher genügt es, (28′) und (28″) zu beweisen.

Wir beweisen zuerst (28′). Offenbar dürfen wir annehmen, daß in (28′) die Symbole auf der linken Seite existieren und rein sind. Wir nehmen a_1, a, b als Diskriminantenzahlen, $a_3(> 1)$ als ganz und quadratfrei an. Man kann noch $a \neq b$ voraussetzen, da sonst (28′) trivial ist.

Es seien α bzw. β solche Zahlen in $k_1 = R(\sqrt{a_1})$, die an die Stelle von α_2 in **1** treten, wenn $a_2 = a$ bzw. $a_2 = b$ gesetzt wird. Den Gleichungen (1) und (2′) entsprechend wird

[24]) Die Gleichung (28′) gilt offenbar auch für nicht reine Symbole.

dann

$$(1_{ab}) \qquad N_{k_1}\alpha \underset{(2)}{=} a, \qquad N_{k_1}\beta \underset{(2)}{=} b,$$

$$(2'_{ab}) \qquad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}, \qquad \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}.$$

Hierbei gehören $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zu α bzw. β. Nach **7**, angewandt auf den Fall $a_2 = b$, kann man α und β so wählen, daß $\mathfrak{ab}$ keine verschiedenen konjugierten Primideale enthält. Dann gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}_3$ in k_1, so daß $N_{k_1}\mathfrak{a}_3 = a_3$, $(\mathfrak{ab}, \mathfrak{a}_3) = 1$ ist. Daher ist nach der Definition in **1**

$$(3_{ab}) \qquad \{a_1, a, a_3\} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}_3}\right), \qquad \{a_1, b, a_3\} = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{a}_3}\right).$$

Es bedeute a_2 die Diskriminante von $R(\sqrt{ab})$. Dann ist $a_2 \underset{(2)}{=} ab$. Dadurch erscheint die rechte Seite von (28′) in der Form $\{a_1, a_2, a_3\}$. Es muß also bewiesen werden, daß dieses Symbol existiert — dann ist es offenbar auch rein — und gleich dem Produkt in (28′) ist.

Ich setze $\alpha_2 = \alpha\beta$ und definiere das ganze Ideal $\mathfrak{a}_2$ durch $\mathfrak{a}_2 \mid \mathfrak{ab}$, $N_{k_1}\mathfrak{a}_2 = a_2$. Dann wird auch $\mathfrak{a}_2 \underset{(2)}{=} \mathfrak{ab}$.

Ich beweise zunächst, daß α_2 den Bedingungen (1) und (2) genügt und zu $\mathfrak{a}_2$ gehört. Nach **5** schließen wir folgendermaßen:

Wegen (1_{ab}) gilt (1).

Im Falle $2 \mid a_1$ ist notwendig $2 \nmid a$, $2 \nmid b$, woraus $2 \nmid a_2$ folgt; daher gilt (7).

Mit a und b zerfällt auch a_2 in k_1 in lauter Primideale ersten Grades, woraus (8) mit $i = 1$ folgt.

Wegen $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right)$ folgt aus $(2'_{ab})$ die Gleichung (2′), wenn man bedenkt, daß $\mathfrak{a}_2$ aus $\mathfrak{ab}$ durch Streichen der Quadratfaktoren entsteht. Nur der Fall $\mathfrak{p} \mid (2, \mathfrak{ab})$ muß noch besonders untersucht werden. Es kann jedenfalls nur ein solches $\mathfrak{p}$ geben. In diesem Falle muß $2 \mid ab$, also $2 \nmid a_1$ gelten. Dann ist $2 = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}')$ und somit nach dem oben Bemerkten $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 0$. Daraus folgt $\left(\frac{\alpha'_2}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$. Nach (1) können also $\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right)$ und $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right)$ nur gleichzeitig verschwinden. Es ist $\left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{a_2}{\mathfrak{p}'}\right)$, und dieses Symbol verschwindet dann und nur dann, wenn die Diskriminante von $k_1(\sqrt{a_2}) \mid k_1$, d. h. auch die von $k_1(\sqrt{a_2})$ gerade ist. Da dies aber wegen $2 \nmid a_1$ nur im Falle $2 \mid a_2$ eintritt, so gilt in allen Fällen (2′). Auf Grund von **5** ist also unsere letzte Behauptung bewiesen.

Nun ist nach (3_{ab})

$$\{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\} = \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right).$$

Das bedeutet zunächst, daß es jetzt einen Wert für (3) gibt, der der linken Seite von (28′) gleich ist. Es sei $\left(\frac{\alpha_2^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right)$ ein beliebiges Symbol in (3), welches nicht verschwindet. Wir zeigen, daß auch dies dem obigen Produkt gleich ist, woraus dann (28′) folgt.

Nach den Voraussetzungen ist

$$\{a_1, a, a_3\} = \left(\frac{\alpha^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right), \qquad \{a_1, b, a_3\} = \left(\frac{\beta^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right),$$

wobei die Zähler irgendwelche, entsprechend wie α und β erklärte Zahlen sind, die aber zu solchen Idealen gehören, die zu $\mathfrak{a}_3^*$ prim sind.

Nach 6 und 7 ist $\alpha_2^* \underset{(2)}{\equiv} r\alpha_2$, $\alpha^* \underset{(2)}{\equiv} s\alpha$, $\beta^* \underset{(2)}{\equiv} t\beta$, wobei r das Produkt aus einigen Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a_2 ist und s bzw. t in der entsprechenden Beziehung zu den Paaren a_1, a bzw. a_1, b stehen. Wegen $\alpha_2 = \alpha\beta$ ist $\alpha_2^* \underset{(2)}{\equiv} rst\,\alpha^*\beta^*$. Nach dem Obigen gilt dann

$$\left(\frac{\alpha_2^*}{\mathfrak{a}_3^*}\right) = \left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3}\right)\{a_1, a, a_3\}\{a_1, b, a_3\},$$

wobei es in dem letzten Symbol $\left(\frac{\dots}{\dots}\right)$ offenbar erlaubt war, $\mathfrak{a}_3^*$ durch $\mathfrak{a}_3$ zu ersetzen, weil der Zähler rational ist. Es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß dieses Symbol den Wert 1 hat.

Ich bezeichne mit D die Diskriminante von $R(\sqrt{rst})$. Offenbar ist nach der letzten Gleichung $\left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3}\right) \neq 0$. Wenn also $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in $\mathfrak{a}_3$ ist, so ist $\mathfrak{p}$ in $k_1(\sqrt{D})/k_1$ nicht verzweigt. Es können somit die Primfaktoren von a_3, die in a_1 nicht aufgehen, also in k_1 nicht verzweigt sind, auch in $k_1(\sqrt{D}) = R(\sqrt{a_1}, \sqrt{D})$ nicht verzweigt sein. Dies bedeutet, daß die Primfaktoren von D, die in a_1 nicht aufgehen, auch in a_3 nicht aufgehen.

Andrerseits ist nach der Bedeutung von r, s, t und wegen $a_2 \underset{(2)}{\equiv} ab$ das Produkt rst und somit auch D, von rationalen Quadratfaktoren abgesehen, ein Produkt $d_1 d_2 \cdots d_i$ aus einigen Primdiskriminantenfaktoren von a_1, a, b. Hier darf man nach dem Vorigen sogar annehmen, daß auch $(d_j, a_3) = 1$ gilt, wenn d_j $(j = 1, 2, \dots, i)$ kein Primdiskriminantenfaktor von a_1 ist. Aus (15), (17) und den Anmerkungen[20] [21], angewandt auf

$$\{a_1, a, a_3\}, \quad \{a_1, b, a_3\}$$

folgt dann $\left(\frac{D}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$, also auch $\left(\frac{rst}{\mathfrak{a}_3}\right) = 1$, womit (28′) bewiesen ist.

Beim Beweis von (28″) nehmen wir wieder an, daß die beiden Symbole auf der linken Seite existieren und rein sind. Wir setzen ferner voraus, daß a_1, a_2 Diskriminantenzahlen und $a, b\,(> 1)$ verschiedene quadratfreie Zahlen sind.

Es sei a_3 die quadratfreie ganze Zahl, für die $a_3 \underset{(2)}{\equiv} ab$ gilt. Dann ist $a_3 > 1$. Die rechte Seite von (28″) erscheint in der Form $\{a_1, a_2, a_3\}$. Zu beweisen ist also, daß dieses Symbol existiert — dann ist es auch rein — und daß es gleich dem Produkt in (28″) ist.

Zu dem Tripel a_1, a_2, a_3 gibt es ein Paar $\alpha_2, \mathfrak{a}_3$, für welches (3) nicht verschwindet. Die Existenz eines α_2 mit den Bedingungen (1) und (2) folgt nämlich schon aus der Existenz von $\{a_1, a_2, a\}$. Die Existenz eines passenden $\mathfrak{a}_3$ folgt daraus, daß mit a und b auch a_3 prim zu (a_1, a_2) ist.

Wir betrachten nun ein beliebiges, von Null verschiedenes Symbol (3). Das darin vorkommende α_2 gehöre zum Ideal $\mathfrak{a}_2$. Dann gilt $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = 1$. Ist $m = (a, b)$, $m > 0$, so gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ in $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ mit $N_{k_1}\mathfrak{m} = m$, $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{m}) = 1$. Ich setze noch

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_3, a), \quad \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_3, b).$$

Wegen $a_3 = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{m}$ ist dann $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $N_{k_1}(\mathfrak{a}\mathfrak{m}) = a$, $N_{k_1}(\mathfrak{b}\mathfrak{m}) = b$; außerdem gilt noch $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}\mathfrak{m}) = (\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}\mathfrak{m}) = 1$. Dann folgt für den Wert von (3)

$$\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}_3}\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{b}\mathfrak{m}}\right) = \{a_1, a_2, a\}\{a_1, a_2, b\}.$$

Das bedeutet die Existenz von $\{a_1, a_2, a_3\}$ und das Bestehen von (28″). Damit ist Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Man hätte den Beweis auch so führen können, daß man zuerst nur die Existenz der Symbole auf den rechten Seiten von (28′), (28″) aus der vorausgesetzten Existenz der linksseitigen Symbole auf Grund des Satzes 1 bestätigt. Dadurch wäre der Beweis jedoch nicht kürzer geworden, und dieser Weg hätte auch weniger Einblick in die Verhältnisse gewährt.

17. Hier sowie in **18** und **19** folgen drei Vorbereitungen zu einer in **20** zu betrachtenden weiteren allgemeinen Eigenschaft unseres Symbols. Diese Vorbereitungen beanspruchen auch selbständiges Interesse.

Ist ein reines Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ *gegeben, so kann man eine ungerade Primzahl* q *derart finden, daß auch* $\{q, a_2, a_3\}$ *existiert und rein ist; im Falle* $a_2 > 0$ *darf man sogar das Vorzeichen von* q *beliebig vorschreiben. Man kann ferner eine ungerade Primzahl* r *finden, so daß* $\{a_1, a_2, |r|\}$ *existiert und rein ist, wobei man das Vorzeichen von* r *beliebig vorschreiben darf* [25]).

Ich nehme q so an, daß $(q, a_2 a_3) = 1$ und im Falle $a_2 < 0$ außerdem noch $q > 0$ ist. Wegen der Annahme über $\{a_1, a_2, a_3\}$ genügt es nach Satz 1, q so zu wählen, daß die Bedingungen

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 1 \ \ (p \mid a_2 a_3), \quad \left(\frac{a_2}{q}\right) = 1, \quad \left(\frac{a_3}{q}\right) = 1$$

erfüllt sind. Von diesen ist nun die erste sicher erfüllbar. Daraus folgt durch Multiplikation

$$\left(\frac{q}{a_2}\right) = 1, \quad \left(\frac{q}{a_3}\right) = 1.$$

Da $a_3 > 0$ und im Falle $a_2 < 0$ auch $q > 0$ ist, sind daher auch die restlichen beiden Bedingungen erfüllt. Damit ist die Behauptung über $\{q, a_2, a_3\}$ bewiesen.

Ähnlich läßt sich auch das über $\{a_1, a_2, |r|\}$ Behauptete beweisen, indem wir zeigen, daß sich r über die Forderungen des Satzes 1 hinaus sogar so wählen läßt, daß auch die Bedingungen

$$\left(\frac{|r|}{p}\right) = 1 \ \ (p \mid a_1 a_2), \quad \left(\frac{a_1}{r}\right) = 1, \quad \left(\frac{a_2}{r}\right) = 1$$

erfüllt sind.

18. Ich behaupte folgendes: *Gilt* $a_3 | a_1 a_2$ *in dem reinen Symbol* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *so läßt sich sein Wert folgendermaßen berechnen: Man bestimmt* a, b, c, b_1, c_1 *aus* $a = (a_1, a_2)$, $a \equiv 1 \pmod 4$, $a_1 = ab$, $a_2 = ac$, $a_3 = b_1 c_1$, $b_1 \mid b$, $c_1 \mid c$ *und löst die Gleichung*

$$ax^2 - by^2 - cz^2 = 0 \tag{29}$$

in ganzen Zahlen x, y, z *mit den Bedingungen* $(x, y, z) = 1$, $2 \nmid x$, $2 \mid yz$, *im Falle* $2^2 \| bc$ *sogar* $4 \mid yz$, *und* $x \equiv bcyz + 1 \pmod 4$. *Dann ist*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{2^y}{b_1}\right)\left(\frac{2^z}{c_1}\right)\left(\frac{ax}{b_1 c_1}\right). \tag{30}$$

Sind insbesondere alle Primfaktoren von c_1 *positiv, so gilt auch*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{2^y}{b_1}\right)\left(\frac{2^z}{c_1}\right)\left(\frac{ax}{b_1}\right)\left(\frac{y}{c_1}\right)\left(\frac{ab}{c_1}\right)_4, \tag{30′}$$

wenn man im Falle $2 \mid c_1$ *das Vorzeichen von* y *gemäß* $y \equiv 1 \pmod 4$ *wählt.*

Ich betrachte zuerst den Fall $2 \mid y$. Dann ist $2 \nmid cc_1 z$. Multipliziert man (29) mit a, so sieht man, daß ax, y, z eine Lösung von (21) ist mit den dort geforderten Eigenschaften,

[25]) Die Zahl q bzw. r kann eventuell auch ein Teiler von $a_1 a_2 a_3$ sein.

so daß jetzt (22) in

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{ax + y\sqrt{ab}}{\mathfrak{b}_1}\right)\left(\frac{ax + y\sqrt{ab}}{\mathfrak{c}_1}\right) \tag{31}$$

übergeht, wobei $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ganze Ideale in $R(\sqrt{ab})$ sind mit der Norm b_1 bzw. c_1, die so gewählt worden sind, daß der zweite Faktor in (31) nicht verschwindet. Das wird erreicht, wenn $\mathfrak{c}_1$ so bestimmt wird, daß $\mathfrak{c}_1 \mid ax - y\sqrt{ab}$ gilt, was offenbar möglich ist.

Ist $\mathfrak{b}_1$ ungerade, so läßt sich im Zähler des ersten Faktors in (31) das zweite Glied streichen. Das gleiche ist auch bei $(\mathfrak{b}_1, 2) \neq 1$ gestattet, denn dies kommt nur im Falle $2 \mid b$, d. h. $2 \mid a_1$ vor, wo dann $2 = \mathfrak{l}^2$ ($\mathfrak{l}$ Primideal in $R(\sqrt{ab})$) ist; nach unseren Annahmen gilt ferner $\mathfrak{l}^5 \mid y\sqrt{ab}$. In demselben Falle ist auch $ax \equiv 1 \pmod 4$, und somit kann man den Nenner $\mathfrak{b}_1$ durch Nennertransformation immer durch b_1 ersetzen. Dadurch entsteht $\left(\frac{ax}{b_1}\right)$.

Da $\mathfrak{c}_1$ ungerade ist, darf man im zweiten Faktor zum Zähler $ax - y\sqrt{ab}$ addieren, wodurch der Zähler in $2ax$ übergeht. Wieder läßt sich $\mathfrak{c}_1$ in c_1 überführen. So bekommt man $\left(\frac{2ax}{c_1}\right)$.

Die so gewonnenen beiden Symbole ergeben als Produkt aber gerade die rechte Seite von (30) für diesen Fall.

Subtrahiert man dagegen $ax - y\sqrt{ab}$, so entsteht für den zweiten Faktor in (31)

$$\left(\frac{2y\sqrt{ab}}{\mathfrak{c}_1}\right) = \left(\frac{2y}{\mathfrak{c}_1}\right)\left(\frac{\sqrt{ab}}{\mathfrak{c}_1}\right).$$

Hier ist der erste Faktor gleich $\left(\frac{2y}{c_1}\right)$. Sind die Primfaktoren von c_1 positiv, so geht der zweite Faktor in $\left(\frac{ab}{c_1}\right)_4$ über. Dadurch ist für diesen Fall auch (30′) bewiesen.

Der Fall $2 \nmid y$ weicht vom vorigen nur wenig ab. Jetzt ist $2 \mid z$, und somit sind nach **14** die Zähler in (31) durch $\frac{1}{2}(ax + y\sqrt{ab}) = \omega$ zu ersetzen. Dabei sind $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ entsprechend wie oben definiert, jedoch so, daß $\mathfrak{c}_1$ jetzt ein Teiler von $\omega' = \frac{1}{2}(ax - y\sqrt{ab})$ wird. Alles verläuft analog wie oben; der einzige Unterschied könnte sich dadurch ergeben, daß c und damit auch $\mathfrak{c}_1$ gerade sein können. Dann zerfällt aber 2 in ein Produkt $\mathfrak{l}\mathfrak{l}'(\mathfrak{l} \neq \mathfrak{l}')$ von Primidealen in $R(\sqrt{ab})$, wobei man $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{c}_1$ annehmen kann. Da aber ω ganz und wegen $\omega\omega' = \frac{1}{4}acz^2$ durch $\mathfrak{l}^3$ teilbar ist, verläuft auch in diesem Falle alles wie vorher. Es tritt jedoch im Resultat $\left(\frac{2}{b_1}\right)$ statt $\left(\frac{2}{c_1}\right)$ auf, wie es auch sein soll. Damit sind (30) und (31) bewiesen.

19. Ich beweise folgendes: *Unter der Bedingung* $a_1a_2a_3 \underset{(2)}{\equiv} \pm 1$ *existiert das Symbol* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *dann und nur dann, wenn* (6) *bis* (9) *gelten und im Falle* $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ *außerdem noch alle Primdiskriminantenfaktoren von* a_1 *und* a_2 *positiv sind. Dann ist das Symbol rein, und es gilt*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \begin{cases} \left(\frac{2}{(a_1, a_2)}\right) & (a_1a_2 < 0), \quad (32) \\ \left(\frac{(a_1, a_2)}{(a_1, a_3)}\right)\left(\frac{a_1}{(a_2, a_3)}\right)_4\left(\frac{a_2}{(a_1, a_3)}\right)_4\left(\frac{a_3}{(a_1, a_2)}\right)_4 & (a_1 > 0, a_2 > 0). \quad (32') \end{cases}$$

Aus der Existenz von $\{a_1, a_2, a_3\}$ folgt nämlich die Gültigkeit von (6) bis (9). Dann kann man wieder $a = (a_1, a_2)$, $a \equiv 1 \pmod 4$, $a_1 = ab$, $a_2 = ac$ setzen. Daraus folgt

$a_3 = |bc|$ oder $\frac{1}{4}|bc|$, je nachdem $2 \nmid bc$ oder $2 \mid bc$ ist. Es lassen sich (8) und (9) in folgender Form schreiben:

$$(33) \qquad \left(\frac{ab}{p}\right) = 1 \ (p \mid c), \qquad \left(\frac{ac}{p}\right) = 1 \ (p \mid b), \qquad \left(\frac{-bc}{p}\right) = 1 \ (p \mid a).$$

Das sind schon die Gleichungen (19), (20) für $j = 1, 2$ bzw. $i = 1, j = 2$, weil jetzt $a_1 a_2 a_3$ keine anderen Primfaktoren hat als $a_1 a_2$. Die übrigen Gleichungen dort lassen sich in der Form

$$(34) \qquad \left(\frac{|bc|}{p}\right) = 1 \ (p \mid a), \qquad \left(\frac{-ab\,|bc|}{p}\right) = 1 \ (p \mid b), \qquad \left(\frac{-ac\,|bc|}{p}\right) = 1 \ (p \mid c)$$

schreiben mit der Einschränkung $p \neq 2$.

Im Falle $a_1 a_2 < 0$, d. h. $|bc| = -bc$ ist (34) dasselbe wie der Teil $p \neq 2$ von (33). Im Falle $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ aber kann (34) neben (33) wegen $|bc| = bc$ dann und nur dann bestehen, wenn $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ für alle ungeraden Primfaktoren von abc gilt. Das heißt aber, daß alle Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a_2 positiv sind, denn im Falle $2 \mid a_1 a_2$ kann auch der einzige gerade Primdiskriminantenfaktor wegen $a_1 a_2 > 0$ keine Ausnahme bilden (es sind ja a_1 und a_2 nicht beide gerade!). Damit haben wir das über die Existenz von $\{a_1, a_2, a_3\}$ Behauptete bewiesen. Daß dieses Symbol auch rein sein muß, ist klar.

Es folgt noch die Berechnung von $\{a_1, a_2, a_3\}$. Nach Satz 2 dürfen wir $2 \nmid a_2$ annehmen.

Im Falle $a_1 a_2 < 0$ wende ich (30) an. In (29) darf man wegen $2 \nmid a_2$ annehmen, daß $2 \mid y$, $2 \nmid z$ gilt. In (30) ist jetzt $b_1 = \pm b$ oder $\pm \frac{1}{4} b$ und $c_1 = \pm c$ zu setzen; man darf jedoch stattdessen $b_1 = b$, $c_1 = c$ nehmen. So entsteht

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{ax}{bc}\right).$$

Indem ich Sgn t als $\frac{t}{|t|}$ $(t \neq 0)$ erkläre und (29) berücksichtige, bekomme ich für den zweiten Faktor den Wert

$$\left(\frac{bc}{ax}\right) \operatorname{Sgn} ax = \left(\frac{-1}{ax}\right) \operatorname{Sgn} ax = (-1)^{\frac{ax-1}{2}}.$$

Wegen $a \equiv 1 \pmod 4$, $x \equiv by + 1 \pmod 4$ entsteht daraus $(-1)^{\frac{by}{2}}$, und dies ist wieder nach (29) gleich $\left(\frac{2}{ac}\right)$. Es ist also das obige Produkt gleich $\left(\frac{2}{a}\right)$, wodurch (32) bewiesen ist.

Im Falle $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ läßt sich (30′) anwenden, wobei zu beachten ist, daß jetzt die Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a_2 positiv sind. Ich nehme dazu in (29) wieder $2 \mid y$ an. Man darf auch wieder $b_1 = b$, $c_1 = c$ einsetzen. Dadurch entsteht

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)\left(\frac{y}{c}\right)\left(\frac{ab}{c}\right)_4.$$

Aus (29) bekommen wir nach einigen leichten Umformungen

$$1 = \left(\frac{-bc^{-1}y^2z^2}{a}\right)_4\left(\frac{ac^{-1}x^2z^2}{b}\right)_4 = \left(\frac{-1}{a}\right)_4\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)\left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{z}{ab}\right)\left(\frac{bc}{a}\right)_4\left(\frac{ac}{b}\right)_4.$$

Wenn $u \geqq 1$ der Exponent von 2 in y ist, also $y = 2^u y_0$, y_0 ungerade, so gilt nach (29)

$$1 = \left(\frac{ac}{y_0}\right) = \left(\frac{y_0}{ac}\right) = \left(\frac{2}{ac}\right)^u\left(\frac{y}{ac}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)\left(\frac{2}{c}\right)\left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{y}{c}\right),$$

wobei beachtet werden muß, daß $\left(\frac{2}{ac}\right) = 1$ gilt im Falle $u > 1$. Weiter folgt aus (29)

$$1 = \left(\frac{ab}{z}\right) = \left(\frac{z}{ab}\right).$$

Existiert das Symbol $\left(\frac{-4}{a}\right)_4$, so ist bekanntlich sein Wert immer 1, also ist

$$1 = \left(\frac{-1}{a}\right)_4 \left(\frac{2}{a}\right).$$

Es ist endlich

$$1 = \left(\frac{ab}{c}\right) = \left(\frac{c}{ab}\right).$$

Durch Multiplikation der sechs letzten Gleichungen ergibt sich

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ab}{c}\right)_4 \left(\frac{ac}{b}\right)_4 \left(\frac{bc}{a}\right)_4.$$

Hieraus folgt (32′), womit unsere Behauptung bewiesen ist.

20. Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Es sei vorausgesetzt, daß das Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert und rein ist. Ich nehme ferner an, daß neben a_1 und a_2 auch a_3 eine Diskriminantenzahl sei im Sinne der an die Definition in* **1** *anschließenden Verabredungen, jedoch braucht a_3 nicht notwendig positiv zu sein* [26]*). Dabei sei von den Fällen $a_2 = -4$ oder $a_3 = -4$ abgesehen* [27]*).*

Für die Existenz des Symbols $\{a_1, a_3, a_2\}$, welches natürlich nur rein sein kann, ist notwendig, daß im Falle $2 \mid a_1$ noch $2 \nmid a_3$, insbesondere für $2^2 \parallel a_1$ auch $\left(\frac{a_3}{2}\right) = 1$ und im Falle $2 \nmid a_2$, $2^2 \parallel a_3$ auch $\left(\frac{a_1}{2}\right) = 1$ gilt.

I) *Ist $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, so sind diese Bedingungen auch schon hinreichend und es ist*

$$\{a_1, a_2, a_3\}\{a_1, a_3, a_2\} = 1. \tag{35}$$

II) *Ist wenigstens eine der beiden Zahlen a_2, a_3 negativ und bedeutet a die Diskriminante des reellen der Körper $R(\sqrt{a_2})$, $R(\sqrt{a_3})$, $R(\sqrt{a_2 a_3})$, so ist für die Existenz von $\{a_1, a_3, a_2\}$ außerdem noch zu fordern, daß alle Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a positiv sind. Es gilt dann*

$$\{a_1, a_2, a_3\}\{a_1, a_3, a_2\} = \left(\frac{2(a_1, \overline{a_1 a})}{(a_1, a)}\right)\left(\frac{a_1}{(a, \overline{a_1 a})}\right)_4 \left(\frac{a}{(a_1, \overline{a_1 a})}\right)_4 \left(\frac{a_1 a}{(a_1, a)}\right)_4, \tag{35′}$$

wobei $\overline{a_1 a}$ die nach Streichung der ganzen rationalen Quadratfaktoren aus $a_1 a$ entstandene Zahl ist.

Bemerkungen. Nach Satz 1 ist in einem reinen Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ wenigstens eine der beiden Zahlen a_1, a_2 positiv. Nach Satz 2 kann man annehmen, daß es a_2 ist. Auf Grund der Fußnote [26]) kann man weiter annehmen, daß a_3 positiv ist. Abgesehen von den angegebenen Ausnahmefällen, die jetzt nur im Falle $2^2 \parallel a_1 a_3$, $2 \nmid a_2$ vorkommen können, läßt sich (35) anwenden. Nach wiederholter Anwendung des Satzes 2 entsteht dann

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\} = \{a_2, a_1, a_3\} = \{a_3, a_1, a_2\}. \tag{36}$$

---

[26]) Offenbar kann man a_3 immer auf genau zwei Arten wählen. Die beiden Werte weichen voneinander um den Faktor -1 bzw. -4 ab.

[27]) Im Falle $a_3 = -4$ ist der Symbolwert gleich 1. Den Fall $a_2 = -4$ betrachten wir in **22** besonders.

Wenn auch noch $a_1 > 0$ ist, so existieren sogar alle sechs Symbole, die durch Permutation von a_1, a_2, a_3 entstehen, und sind einander gleich:

$$(37)\quad \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\} = \{a_2, a_1, a_3\} = \{a_2, a_3, a_1\} = \{a_3, a_1, a_2\} = \{a_3, a_2, a_1\}.$$

Und zwar gilt (37), wenn $\{a_1, a_2, a_3\}$ existiert und rein ist, a_1, a_2, a_3 positive Diskriminantenzahlen und zwei von ihnen ungerade sind, und endlich im Falle $2^2 \| a_1 a_2$ auch $\left(\frac{a_3}{2}\right) = 1$ und im Falle $2^2 \| a_3$ auch $\left(\frac{a_1}{2}\right) = \left(\frac{a_2}{2}\right) = 1$ erfüllt ist.

Auch wenn eine der Zahlen a_1, a_2, a_3 negativ ist, kann es vorkommen, daß alle sechs Symbole in (37) existieren. Diese brauchen jedoch dann nicht einander gleich zu sein. Beispiele hierfür werde ich erst in **24**, II) angeben.

Beweis. Für $i = 2, 3$ setze ich $a_{i0} = a_i$ oder $\frac{1}{4} a_i$, je nachdem $2 \nmid a_i$ oder $2 \mid a_i$ ist. Aus der Voraussetzung folgt die Gültigkeit von (19) und (20), die jetzt in folgender Weise zu schreiben sind:

$$(19')\quad \left(\frac{a_1}{p}\right) = 1 \ (p \nmid a_1), \quad \left(\frac{a_2}{p}\right) = 1 \ (p \nmid a_2), \quad \left(\frac{|a_3|}{p}\right) = 1 \ (p \nmid 2a_3);$$

$$(20')\quad \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_1, a_2)), \quad \left(\frac{-a_1 |a_3|}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_1, a_3), \ p \neq 2),$$

$$\left(\frac{-a_2 |a_3|}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_2, a_3), \ p \neq 2),$$

wobei nur $p \mid a_1 a_2 a_{30}$ zu berücksichtigen ist.

Wir nehmen ferner die Existenz des Symbols $\{a_1, a_3, a_2\}$ an. Es ist notwendig rein. Dann muß im Falle $a_1 < 0$ noch $a_3 > 0$, ebenso im Falle $2 \mid a_1$ noch $2 \nmid a_3$ erfüllt sein. Endlich müssen die Gleichungen (19), (20) auch für $\{a_1, a_3, a_2\}$ statt $\{a_1, a_2, a_3\}$ bestehen; diese lassen sich in einer (19′), (20′) entsprechenden Reihenfolge in folgender Form schreiben:

$$(19'')\quad \left(\frac{a_1}{p}\right) = 1 \ (p \nmid a_1), \quad \left(\frac{|a_2|}{p}\right) = 1 \ (p \nmid 2a_2), \quad \left(\frac{a_3}{p}\right) = 1 \ (p \nmid a_3);$$

$$(20'')\quad \left(\frac{-a_1 |a_2|}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_1, a_2), \ p \neq 2), \quad \left(\frac{-a_1 a_3}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_1, a_3)),$$

$$\left(\frac{-|a_2| a_3}{p}\right) = 1 \ (p \mid (a_2, a_3), \ p \neq 2),$$

wobei nur $p \mid a_1 a_{20} a_3$ zu berücksichtigen ist.

Wir bezeichnen für einen Augenblick mit A und B die Gesamtheit derjenigen Gleichungen (19′), (20′) bzw. (19″), (20″), in denen $p \neq 2$ ist. Wenn $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ ist, so stimmt A mit B überein. Wenn $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ ist, so entsteht B aus A dadurch, daß man überall in den Zählern, in denen a_3 vorkommt, den Faktor -1 hinzufügt. Damit B neben A besteht, ist also in diesem Falle notwendig und hinreichend, daß für $p \mid a_1 a_2 a_3$, $p \neq 2$ immer $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ ist, wenn entweder $p \nmid a_3$ oder $p \mid (a_1, a_3)$ oder $p \mid (a_2, a_3)$ gilt. Anders ausgedrückt: Es müssen die ungeraden Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a_2 positiv sein. Der eventuell vorhandene gerade Primdiskriminantenfaktor kann aber keine Ausnahme bilden, denn es ist jetzt $a_2 > 0$ und wegen $a_3 < 0$ auch $a_1 > 0$. Im Falle $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ bekommen wir ein ähnliches Resultat. Wenn endlich $a_2 < 0$, $a_3 < 0$ ist, so tritt beim Übergang von A zu B überall dort im Zähler der Faktor -1 hinzu, wo genau eine der Zahlen a_2, a_3 vorkommt. Jetzt muß also wieder für $p \mid a_1 a_2 a_3$, $p \neq 2$ immer $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ gelten, wenn entweder $p \nmid a_2$ oder $p \nmid a_3$ oder $p \mid (a_1, a_2)$

oder $p \mid (a_1, a_3)$ ist, d. h. also immer dann, wenn $p \nmid (a_2, a_3)$ gilt. Dies sind genau diejenigen Primzahlen p, für welche $p \mid a_1$ und diejenigen, für welche $p \mid a$ gilt, wobei a die Diskriminante von $R(\sqrt{a_2 a_3})$ ist. Es gilt auch die Ergänzung für den eventuell vorhandenen geraden Primdiskriminantenfaktor entsprechend wie vorher, weil ja $a_1 > 0$ und $a > 0$ ist. Natürlich sind die so erzielten Bedingungen zugleich hinreichend für das Übereinstimmen von A und B. Auf diese Weise gelangt man gerade zu den in II) angegebenen Bedingungen.

Nimmt man noch den sich auf $p = 2$ beziehenden Teil von (19″) hinzu (in (20″) ist ja $p \neq 2$), so gewinnt man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von $\{a_1, a_3, a_2\}$. Dabei braucht man jedoch nur diejenigen Gleichungen zu beachten, die nicht schon in (19′) enthalten sind. Dies sind die folgenden:

$$(38) \qquad \left(\frac{a_3}{2}\right) = 1 \ (2 \mid a_1 a_{20},\ 2 \nmid a_3), \qquad \left(\frac{a_1}{2}\right) = 1 \ (2 \nmid a_2,\ 2^2 \parallel a_3),$$

wobei wir zu berücksichtigen haben, daß nie $2 \mid a_1$, $2 \mid a_2 a_3$ zuzulassen ist. Die erste dieser Gleichungen tritt ausführlich geschrieben in den Fällen 1) $2^2 \parallel a_1$, 2) $2^3 \mid a_1$, 3) $2^3 \mid a_2$ auf, wobei jedesmal noch $2 \nmid a_3$ hinzuzunehmen ist. Nun ist auf Grund der Fußnoten [20]) [21]) auch $\left(\frac{d_1}{a_3}\right) = 1 \ (2 \mid a_1)$, $\left(\frac{d_2}{a_3}\right) = 1 \ (2 \mid a_2)$, wenn d_1 bzw. d_2 jedesmal den geraden Primdiskriminantenfaktor von a_1 bzw. a_2 bedeutet. Für $a_3 < 0$ kann aber nach dem oben Bemerkten nur $d_1 > 0$ bzw. $d_2 > 0$ in Frage kommen, und somit entsteht aus den letzten Gleichungen immer $\left(\frac{a_3}{d_1}\right) = 1$ bzw. $\left(\frac{a_3}{d_2}\right) = 1$. Das bedeutet, daß die erste Gleichung von (38) in den Fällen 2), 3) schon aus den Voraussetzungen des Satzes 4 folgt. Diese Gleichung braucht also nur im Falle 1) unter die Existenzbedingungen aufgenommen zu werden. Damit sind die Existenzaussagen des Satzes 4 bewiesen.

Jetzt brauchen nur noch (35) und (35′) bewiesen zu werden. Ich setze zur Abkürzung

$$u_2 = \{a_1, a_2, a_3\}, \qquad u_3 = \{a_1, a_3, a_2\}.$$

Weiter setze ich vorläufig nur formal

$$v_2 = \{a_1, a_2, a_1 a_2\}, \qquad v_3 = \{a_1, a_3, a_1 a_3\}, \qquad v_{23} = \{a_1, a_2 a_3, a_1 a_2 a_3\}.$$

Zuerst beweise ich (35′). Ist $a_2 < 0$, $a_3 > 0$, so existiert v_3 wegen der Existenz von u_3 und wegen **19.** Nach **19** existiert auch v_2. Nach Satz 3 ist $u_2 v_2 u_3 v_3 = v_{23}$. Man kann also v_2 und v_{23} nach (32) ausdrücken:

$$v_2 = \left(\frac{2}{(a_1, a_2)}\right), \qquad v_{23} = \left(\frac{2}{(a_1, a_2 a_3)}\right),$$

wobei zu beachten ist, daß ein gemeinsamer Faktor von a_2 und a_3 in a_1 nicht aufgehen kann. Durch Multiplikation entsteht offenbar $v_2 v_{23} = \left(\frac{2}{(a_1, a_3)}\right)$. Weiter läßt sich v_3 durch (32′) ausdrücken, wobei jetzt a_3, $\overline{a_1 a_3}\ (\underset{(2)}{=} a_1 a_3)$ statt a_2, a_3 einzusetzen ist. Wendet man auf den ersten Faktor das quadratische Reziprozitätsgesetz an, so entsteht

$$v_3 = \left(\frac{(a_1, \overline{a_1 a_3})}{(a_1, a_3)}\right) \left(\frac{a_1}{(a_3, \overline{a_1 a_3})}\right)_4 \left(\frac{a_3}{(a_1, \overline{a_1 a_3})}\right)_4 \left(\frac{a_1 a_3}{(a_1, a_3)}\right)_4.$$

Es ist also (35′) in diesem Falle richtig, da jetzt $a = a_3$ ist. Damit ist (35′) offenbar auch für den Fall $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ bewiesen.

Der Fall $a_2 < 0$, $a_3 < 0$ ist ähnlich, nur mit dem Unterschied, daß sich jetzt v_2, v_3 durch (32) und v_{23} durch (32′) ausdrücken lassen. Es folgt wieder (35′), wobei a jetzt die Diskriminante von $R(\sqrt{a_2 a_3})$ bedeutet.

Zum Beweise von (35) nehme ich $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ an und betrachte zuerst den Fall $a_1 < 0$. Dieser Fall ist wieder dem vorigen ähnlich, nur noch einfacher; denn jetzt lassen sich nicht nur v_2, v_3 sondern auch v_{23} durch (32) ausdrücken. Dabei gelten für v_2 und v_{23} die oben angeführten Ausdrücke, zu denen noch $v_3 = \left(\frac{2}{(a_1, a_3)}\right)$ kommt. Es ist also $v_2 v_3 v_{23} = 1$, d. h. es gilt (35).

Im Falle $a_1 > 0$ benutze ich **17.** Die Symbole v_2, v_3, v_{23} existieren jetzt im allgemeinen nicht. Ich wähle eine negative Primzahl q so, daß $\{q, a_2, a_3\}$ existiert und rein ist. Dann ist nach Satz 3

$$\{a_1, a_2, a_3\}\{q, a_2, a_3\} = \{a_1 q, a_2, a_3\}.$$

Nach dem eben Bewiesenen gilt (35) für die beiden letzten Symbole, also notwendigerweise auch für das erste Symbol. Damit haben wir unseren Satz bewiesen.

Die Formeln (35), (35′) kann man auch mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes in $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ bestätigen. Dies führe ich noch für den Fall $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $2 \nmid a_2$, $2 \nmid a_3$ aus. Man setzt nach (3)

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right).$$

Definiert man α_3 entsprechend zu a_1, a_3 wie α_2 zu a_1, a_2, so muß mit $\{a_1, a_3, a_2\}$ auch ein α_3 existieren. Man kann nach **7** annehmen, daß α_3 zu $\mathfrak{a}_3$ gehört. Dann ist offenbar $\alpha_3 \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{a}_3$, woraus folgt

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right).$$

Natürlich muß auch

$$\{a_1, a_3, a_2\} = \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)$$

gelten. Wegen (2) ist nun $\alpha_2 \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod 4$ und ebenso $\alpha_3 \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod 4$. Statt der letzten Kongruenz würde sogar genügen, daß $\alpha_3 \underset{(2)}{\equiv} \omega$ ist mit einem ungeraden ω. Es ist dann

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right)\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = (-1)^{\frac{\operatorname{Sgn}\alpha_2 - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{Sgn}\alpha_3 - 1}{2} + \frac{\operatorname{Sgn}\alpha_2' - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{Sgn}\alpha_3' - 1}{2}}.$$

Wegen (1) ist $\operatorname{Sgn}\alpha_2 = \operatorname{Sgn}\alpha_2'$. Das gleiche gilt für α_3. Das betrachtete Produkt hat also den Wert 1, woraus (35) folgt. Der volle Beweis wäre jedoch auf diesem Wege nicht einfacher.

21. Es gilt folgender

Satz 5. *Existieren die Symbole* $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, a_3\}$, *sind sie rein und ist* $a_1 a_2 b_1 b_2 \underset{(2)}{\equiv} 1$, *so existiert auch das Symbol* $\{a_1 b_1, a_2 b_1, a_3\}$, *es ist rein, und es gilt*

$$\{a_1, a_2, a_3\}\{b_1, b_2, a_3\} = \{a_1 b_1, a_2 b_1, a_3\}. \tag{39}$$

Auf Grund des Satzes 2 dürfen wir annehmen, daß $2 \nmid a_2 b_1$ gilt. Wir nehmen ferner an, daß $b_1 \neq a_1$, $b_1 \neq a_2$ ist, denn sonst wäre ja (39) richtig. Ich bezeichne dann mit c_1 bzw. c_2 die Diskriminante des Körpers $R(\sqrt{a_1 b_1})$ bzw. $R(\sqrt{a_2 b_1})$. Dann folgt

$$c_1 \underset{(2)}{\equiv} a_1 b_1, \quad c_2 \underset{(2)}{\equiv} a_2 b_1. \tag{40}$$

Indem ich wieder die Bezeichnung $k_1 = R(\sqrt{a_1})$ gebrauche, setze ich noch $l_1 = R(\sqrt{b_1})$, $m_1 = R(\sqrt{c_1})$. Statt α_2 mit den Eigenschaften (1), (2) schreibe ich jetzt einfach α, und

eine für das Paar b_1, b_2 (statt a_1, a_2) entsprechend definierte Zahl aus l_1 nenne ich β, so daß dann die Beziehungen

$$\alpha\alpha' \underset{(2)}{\equiv} a_2, \qquad \beta\beta' \underset{(2)}{\equiv} b_2 \tag{41}$$

und

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}, \qquad \left(\frac{\beta}{\mathfrak{q}}\right) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{q} \mid \mathfrak{b} \tag{42}$$

bestehen, wobei $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ die zu α bzw. β gehörenden Ideale in k_1 bzw. l_1 sind, und $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ alle Primideale in diesen Körpern durchlaufen.

Ich setze

$$\gamma = \alpha^{-1}\beta^{-1}(\alpha\beta + \sqrt{\alpha\alpha'}\sqrt{\beta\beta'})^2 = (\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha'\beta'})^2 \tag{43}$$

und behaupte, daß γ eine für das Paar c_1, c_2 (statt a_1, a_2) den Bedingungen (1), (2) genügende Zahl in m_1 ist, wenn α und β geeignet gewählt werden.

Wegen (41) und wegen $a_2 b_2 \underset{(2)}{\equiv} a_1 b_1$ liegt γ in $k_1 l_1 = R(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1})$. Weiter ist die konjugierte Zahl zu γ in $k_1 l_1 \mid m_1 = m_1(\sqrt{a_1}) \mid m_1$

$$\alpha'^{-1}\beta'^{-1}(\alpha'\beta' + \sqrt{\alpha\alpha'}\sqrt{\beta\beta'})^2,$$

und diese ist wieder gleich γ, also liegt γ in m_1. Die zu γ absolut konjugierte Zahl ist

$$\gamma' = \alpha'^{-1}\beta^{-1}(\alpha'\beta - \sqrt{\alpha\alpha'}\sqrt{\beta\beta'})^2 = (\sqrt{\alpha'\beta} - \sqrt{\alpha\beta'})^2.$$

Also ist

$$\gamma\gamma' = ((\beta - \beta')\sqrt{\alpha\alpha'} - (\alpha - \alpha')\sqrt{\beta\beta'})^2.$$

Da $\alpha - \alpha' = x\sqrt{a_1}$, $\beta - \beta' = y\sqrt{b_1}$ mit rationalen x, y ist, gilt wegen (41) und $a_1 b_2 \underset{(2)}{\equiv} a_2 b_1 \underset{(2)}{\equiv} c_2$

$$\gamma\gamma' \underset{(2)}{\equiv} c_2. \tag{44}$$

Die Zahl γ genügt also der Bedingung (1).

Auch (7) besteht wegen $2 \nmid c_2$ für c_1, c_2 statt a_1, a_2.

Ebenso ist es mit dem Fall $i = 1$ von (8), d. h. es müssen alle Primfaktoren p von c_2 in m_1 voll zerfallen. Nur die beiden folgenden Fälle brauchen untersucht zu werden: 1) $p \mid a_1$, $p \mid b_1$, $p \nmid a_2 b_2$ und 2) $p \nmid a_1 b_1$, $p \mid a_2$, $p \mid b_2$. Im Falle 1) zerfällt p nach (8) in $R(\sqrt{a_2})$ und $R(\sqrt{b_2})$, also auch in $m_1 = R(\sqrt{a_2 b_2})$ voll. Analoges gilt auch im Falle 2) in den Körpern $R(\sqrt{a_1})$, $R(\sqrt{b_1})$, $m_1 = R(\sqrt{a_1 b_1})$.

Um **5** anwenden zu können, braucht nur noch nachgeprüft zu werden, für welche Primideale $\mathfrak{r}$ in m_1 das Symbol $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) = 0$ ist. Ich bezeichne dabei immer mit p die durch $\mathfrak{r}$ teilbare Primzahl, mit $\mathfrak{P}$ einen Primidealfaktor von $\mathfrak{r}$ in $k_1 l_1$ und endlich mit $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ die durch $\mathfrak{P}$ teilbaren Primideale von k_1 bzw. l_1.

Ist $p \mid c_2$ (also $p \neq 2$), so unterscheide ich die Fälle 1) $p \mid c_1$ und 2) $p \nmid c_1$.

Im Falle 1) ist $p = \mathfrak{r}^2$, und es ist nach (44) $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) = 0$. Im Falle 2) ist $p = \mathfrak{r}\mathfrak{r}'$ $(\mathfrak{r} \neq \mathfrak{r}')$, und es gilt wieder nach (44) mit geeigneter Bezeichnung

$$\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}'}\right) \neq 0.$$

Ist $p \nmid c_2$, so sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:
3) $p \nmid a_1 a_2 b_1 b_2$; 4) $p \mid a_1$, $p \mid b_2$, $p \nmid a_2 b_1$; 5) $p \mid a_2$, $p \mid b_1$, $p \nmid a_1 b_2$; 6) $p \mid a_1$, $p \mid a_2$, $p \mid b_1$, $p \mid b_2$.
Weil jetzt $\left(\frac{c_2}{\mathfrak{r}}\right) \neq 0$ ist, folgt aus (44), daß mit $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) \neq 0$ auch $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}'}\right) \neq 0$ gelten muß.

Im Falle 3) ist nach (42) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$, $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{q}}\right) \neq 0$. Es ist $\mathfrak{P} \| p$, also auch $\mathfrak{P} \| \mathfrak{r}$. Da der Exponent von $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ in α bzw. β gerade ist, so gilt das gleiche für den Exponenten von $\mathfrak{P}$ in α und β und wegen (43) auch in γ. Endlich ist auch der Exponent von $\mathfrak{r}$ in γ gerade. Im Falle $p \neq 2$ ist also $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) \neq 0$. Auch für $p = 2$ gilt dasselbe, weil dann sogar die Kongruenzen $\alpha \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$, $\beta \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{q}^2}$ bestehen, woraus auf ähnlichem Wege $\gamma \underset{(2)}{\equiv} 1 \pmod{\mathfrak{P}^2}$ und auch $\pmod{\mathfrak{r}^2}$ folgt.

Im Falle 4) ist $p = \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{r}^2 = \mathfrak{P}^2\mathfrak{P}'^2$ $(\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}')$, und somit gilt wieder $\mathfrak{P} \| \mathfrak{r}$. Nach (42) ist auch jetzt $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \neq 0$ und, mit geeigneter Bezeichnung, $\left(\frac{\beta}{\mathfrak{q}}\right) \neq 0$. Wie unter 3) ist also auch jetzt $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) \neq 0$.

Der Fall 5) ist ähnlich dem Fall 4), nur mit dem Unterschied, daß k_1 und l_1 ihre Rollen vertauschen. Auch tritt die Vereinfachung ein, daß jetzt $p \neq 2$ sein muß.

Im Falle 6) ist $\mathfrak{r} \| p$ und $p \neq 2$. Nach **6** läßt sich α durch $p\alpha$ ersetzen. Nach (43) geht dadurch auch γ in $p\gamma$ über. Denkt man sich dies nötigenfalls von vornherein eingesetzt, so hat man auch jetzt wieder $\left(\frac{\gamma}{\mathfrak{r}}\right) \neq 0$.

Damit haben wir die Behauptung über (43) bewiesen. Ich halte ein im dortigen Sinne geeignet gewähltes γ fest und bezeichne mit γ^* eine beliebige Zahl in m_1, die für c_1, c_2 (statt a_1, a_2) den Bedingungen (1) und (2) genügt. Nach (40) ist offenbar $(c_1, c_2, a_3) = 1$, und a_3 zerfällt in $m_1 = R(\sqrt{a_1 b_1}) = R(\sqrt{a_2 b_2})$ in lauter Primideale ersten Grades. Das bedeutet, daß das Symbol $\{c_1, c_2, a_3\}$, wenn es existiert, nur rein sein kann, und daß es weiter nach **8** ein ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ im m_1 mit der Norm a_3 gibt, für welches

$$\left(\frac{\gamma^*}{\mathfrak{c}}\right) \tag{45}$$

nicht verschwindet. Sonst soll $\mathfrak{c}$ beliebig gewählt werden. Ich beweise, daß (45) immer gleich $\{a_1, a_2, a_3\}\{b_1, b_2, a_3\}$ ist. Das wird dann zugleich die Existenz von $\{c_1, c_2, a_3\}$ und die Formel (39) bestätigen.

Wegen der Voraussetzungen zerfällt a_3 offenbar sogar in

$$k_1 l_1 = R(\sqrt{a_1}, \sqrt{b_1}) = R(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2 b_2})$$

in lauter Primideale ersten Grades. Daher gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{A}$ in $k_1 l_1$ mit

$$N_{k_1 l_1 | m_1} \mathfrak{A} = \mathfrak{c}. \tag{46}$$

Da $\mathfrak{c}$ und daher erst recht $\mathfrak{A}$ prim zur Diskriminante von $m_1(\sqrt{\gamma^*}) \mid m_1$ ist, ergibt sich durch Nennertransformation

$$\left(\frac{\gamma^* \mid k_1 l_1}{\mathfrak{A}}\right) = \left(\frac{\gamma^* \mid m_1}{\mathfrak{c}}\right) = \left(\frac{\gamma^*}{\mathfrak{c}}\right). \tag{47}$$

Ich setze noch

$$\mathfrak{a}^* = N_{k_1 l_1 | k_1} \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{b}^* = N_{k_1 l_1 | l_1} \mathfrak{A} \tag{48}$$

und wähle ein zu $\mathfrak{a}^*$ bzw. $\mathfrak{b}^*$ gehörendes α^* bzw. β^* in k_1 bzw. l_1. Dann ist

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \left(\frac{\alpha^*}{\mathfrak{a}^*}\right), \qquad \{b_1, b_2, a_3\} = \left(\frac{\beta^*}{\mathfrak{b}^*}\right). \tag{49}$$

Nach **6** und **7** gilt

$$\alpha^* \underset{(2)}{\equiv} r\alpha, \qquad \beta^* \underset{(2)}{\equiv} s\beta, \qquad \gamma^* \underset{(2)}{\equiv} t\gamma, \tag{50}$$

wobei r, s, t Produkte einiger Primdiskriminantenfaktoren von a_1 und a_2 bzw. b_1 und b_2 bzw. c_1 und c_2 sind.

Nach (43) ist $\gamma \underset{(2)}{\equiv} \alpha\beta$ in $k_1 l_1$. In $k_1 l_1$ gilt also nach (50) $\gamma^* \underset{(2)}{\equiv} rst\alpha^*\beta^*$. Deshalb dürfen wir den Zähler des ersten Symbols in (47) durch $rst\alpha^*\beta^*$ ersetzen. Dadurch entsteht

$$\left(\frac{\gamma^*}{\mathfrak{c}}\right) = \left(\frac{rst}{\mathfrak{A}}\right)\left(\frac{\alpha^*}{\mathfrak{A}}\right)\left(\frac{\beta^*}{\mathfrak{A}}\right),$$

wobei die letzten Symbole wegen (48) und (49) offenbar von Null verschieden sind. Das gestattet, die rechte Seite in Produktform zu schreiben. Auf diese Symbole kann man wieder wie in (47) eine Nennertransformation von $k_1 l_1$ zu k_1 bzw. zu l_1 anwenden, wodurch nach (48) die Nenner $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{b}^*$ entstehen. So bekommt man nach (49)

$$\left(\frac{\gamma^*}{\mathfrak{c}}\right) = \left(\frac{rst}{\mathfrak{A}}\right)\{a_1, a_2, a_3\}\{b_1, b_2, a_3\}. \tag{51}$$

Ich beweise, daß der erste Faktor rechts gleich 1 ist, wobei ich ähnlich schließe wie am Ende des Beweises von (28′). Bezeichnet wieder D die Diskriminante von $R(\sqrt{rst})$, so sind die Primidealfaktoren von $\mathfrak{A}$ in $k_1 l_1(\sqrt{D})$ unverzweigt, da nach (51) $\left(\frac{rst}{\mathfrak{A}}\right) \neq 0$ ist. Das ergibt wieder, daß die Primfaktoren von D, die weder in a_1 noch in b_1 aufgehen, auch nicht in a_3 aufgehen können.

Andrerseits ist D nach dem oben Bemerkten ein Produkt $d_1 d_2 \cdots d_i$ aus einigen Primdiskriminantenfaktoren von a_1, a_2, b_1 und b_2. Dabei ist, wie wir eben sahen, entweder $d_j \mid a_1 b_1$ oder $d_j \nmid a_3$ $(j = 1, 2, \ldots, i)$. Ist also $d_j \mid a_1 a_2$, so folgt $\left(\frac{d_j}{\mathfrak{A}}\right) = 1$ daraus, daß nach (15), (17) und den Fußnoten [20] [21]) angewandt auf $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{b_1, b_2, a_3\}$ sogar $\left(\frac{d_j}{\mathfrak{a}^*}\right) = 1$ mit $(\mathfrak{a}_3 =)\mathfrak{a}^*$ gilt. Entsprechendes folgt auch im Falle $d_j \mid b_1 b_2$. Es ist also $\left(\frac{rst}{\mathfrak{A}}\right) = \left(\frac{D}{\mathfrak{A}}\right) = 1$, und somit ist der Satz nach (51) bewiesen.

§ 3.

22. In diesem Paragraphen betrachte ich einige Spezialfälle unseres Symbols. Diese werden z. T. später angewandt werden. Darüber hinaus wollen wir hier auch sehen, wie unser Symbol sich in den einfachsten Fällen möglichst leicht berechnen läßt. Ich beschränke mich im folgenden überall auf reine Symbole, ohne es besonders zu erwähnen.

Zuerst beweise ich folgendes: *Sind a, b, c paarweise relativ prime Produkte aus positiven Primdiskriminanten (einige dieser drei Zahlen dürfen auch 1 sein, jedoch sei $ab \neq 1$, $ac \neq 1$) ist $2 \nmid ab$ und sind endlich ab, ac bzw. bc quadratische Reste von $8c$, b bzw. a, so existiert das Symbol $\{-4, ab, ac\}$, und es ist*

$$\{-4, ab, ac\} = \left(\frac{2a}{b}\right)\left(\frac{ab}{c}\right)_4\left(\frac{ac}{b}\right)_4\left(\frac{bc}{a}\right)_4. \tag{52}$$

In anderen Fällen existiert ein Symbol von der Gestalt $\{-4, \ldots, \ldots\}$ nicht.

Ein Symbol $\{-4, \ldots, \ldots\}$ können wir nämlich in der Form $\{-4, ab, ac\}$ annehmen, wobei a, b, c paarweise relativ prime Diskriminantenzahlen oder 1 sind. Wenn das Symbol existiert, so ist nach Satz 1 $ab > 0$, $2 \nmid ab$; auch müssen nach (19) die ungeraden Primfaktoren von abc positiv sein, und ferner muß $\left(\frac{ab}{2}\right) = 1$ gelten. Aus (20) folgt weiter, daß ab, ac bzw. bc quadratische Reste von c, b bzw. a sein müssen. Endlich dürfen

wir $c > 0$ annehmen, so daß dann auch der eventuell vorhandene gerade Primdiskriminantenfaktor von c positiv sein muß.

Nach **19** existiert dann auch $\{-4bc, ab, ac\}$, und nach Satz 3 ist

$$\{-4, ab, ac\}\{-4bc, ab, ac\} = \{bc, ab, ac\},$$

so daß also auch das letzte Symbol existieren muß. Wendet man auf dieses und auf das zweite Symbol links (32′) bzw. (32) an und berücksichtigt dabei die Beziehung $\left(\frac{b}{c}\right) = \left(\frac{c}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$, so entsteht (52).

23. Ich will jetzt diejenigen Symbole angeben, in denen zwei der Argumente einander gleich sind. Dazu nehme ich a_3 in der Form einer Diskriminantenzahl an. *Ist a, b eine D-Zerfällung zweiter Art der Diskriminante ab und ist a ein Produkt aus lauter positiven Primdiskriminanten, so bestehen die Gleichungen*

$$\{a, b, a\} = \{b, a, a\} = \left(\frac{b}{a}\right)_4, \tag{53}$$

$$\{a, a, b\} = \left(\frac{|b|}{a}\right)_4 \qquad (2 \nmid a), \tag{53′}$$

$$\{a, b, b\} = \{b, a, b\} = \left(\frac{b}{a}\right)_4 \qquad (b < 0). \tag{53″}$$

In anderen Fällen, wo zwei der Zahlen a_1, a_2, a_3 einander gleich sind, existiert das Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$ nicht.

Nach Satz 2 genügt es, Symbole von der Form $\{a, a, b\}$ und $\{a, b, a\}$ zu betrachten. In beiden Fällen muß nach Satz 1 offenbar $(a, b) = 1$ gelten, und a, b dürfen nicht beide negativ sein.

Existiert $\{a, a, b\}$, wobei dann sicher $2 \nmid a$ ist, so folgt aus dem Fall $i = 1, j = 2$ von (20), daß $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ für alle Primfaktoren von a gilt. Weiter ergibt (19), daß a, b eine D-Zerfällung zweiter Art sein muß.

Existiert weiter $\{a, b, a\}$, so ist nach (19) a, b wieder eine D-Zerfällung zweiter Art. Ist dabei $a > 0$, so folgt aus dem Fall $i = 1, j = 3$ von (20) wieder $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ für die ungeraden Primfaktoren von a. Ist aber $a < 0$, so folgt aus den Fällen $j = 1, 3$ von (19), daß $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{-a}{p}\right) = 1$, also auch $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ für die ungeraden Primfaktoren von b gilt. Vertauschen wir in diesem Falle a mit b, so sehen wir, daß wir es wirklich nur mit den Symbolen (53), (53′), (53″) zu tun haben.

Ich berechne zuerst das Symbol $\{b, a, a,\}$ in (53) mit Hilfe von **18**. Dazu nehme ich eine Lösung der Gleichung

$$x^2 - by^2 - az^2 = 0 \tag{54}$$

in ganzen Zahlen x, y, z mit den Bedingungen $(x, y, z) = 1$, $2 \nmid x$, $2 \mid yz$, im Falle $2^2 \| b$ sogar $4 \mid yz$ und endlich $x \equiv ab\,yz + 1 \pmod 4$. Dann gilt nach (30′) (dort ist jetzt $a = 1$, $c = a$, $b_1 = 1$, $c_1 = a$ zu setzen)

$$\{b, a, a\} = \left(\frac{2^2}{a}\right)\left(\frac{y}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)_4, \tag{55}$$

wobei im Falle $2 \mid a$ das Vorzeichen von y gemäß $y \equiv 1 \pmod 4$ zu wählen ist.

Ist nun $2 \nmid b$, so kann man $2 \nmid y$ annehmen. Nach (54) ist dann in (55) der zweite Faktor $\left(\frac{y}{a}\right) = \left(\frac{a}{y}\right) = 1$. Der erste Faktor kann wegen $2 \mid z$ fortgelassen werden, und so entsteht (53).

Ist dagegen $2 \mid b$, so ist $\left(\frac{a}{2}\right) = 1$, und man erhält ein ähnliches Resultat wie vorher.

(53″) folgt aus (53), weil im Falle $b < 0$ nach **19** auch

$$\{b, a, b\}\{b, a, a\} = \{b, a, ab\} = 1$$

gilt.

Für $b > 0$ folgt (53′) aus (53) unmittelbar nach Satz 4. Auch für $b < 0$ folgert man (53′) aus (53), da dann nach **19**

$$\{a, a, b\}\{b, a, b\} = \{ab, a, b\} = \left(\frac{2}{a}\right) = \left(\frac{-1}{a}\right)_4$$

gilt. Damit sind die Behauptungen bewiesen.

Bemerkung. Nach (53) bis (53″) können wir unser Symbol als eine Verallgemeinerung des Symbols $\left(\frac{\ldots \mid R}{\ldots}\right)_4$ betrachten. Diese Verallgemeinerung ließ sich jedoch nicht restlos durchführen, wie folgendes Beispiel zeigt. Sind p, q, r positive, ungerade Primzahlen mit $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = -1$, so existiert einerseits $\left(\frac{pq}{r}\right)_4$, andererseits aber existiert jetzt, wie man leicht erkennt, kein Symbol $\{a_1, a_2, a_3\}$, in welchem die Beziehungen $a_i > 1$, $a_i \mid pqr\,(i = 1, 2, 3)$ und $r \mid a_1 a_2 a_3$ gelten.

24. Das einfachste Beispiel eines „eigentlichen", d. h. durch Symbole $\left(\frac{\ldots \mid R}{\ldots}\right)$, $\left(\frac{\ldots \mid R}{\ldots}\right)_4$ nicht ausdrückbaren Symbols wird durch $\{p, q, r\}$ geliefert, wobei p, q, r verschiedene ungerade Primzahlen sind. (Ich will hier von dem Fall gerader Argumente absehen, der übrigens auch leicht zu behandeln wäre.) Zur Existenz ist notwendig und hinreichend, daß p und q nicht beide negativ sind und $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = 1$ gilt. Auf Grund der Sätze 2 und 4 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p > 0$ und im Falle $qr < 0$ auch noch $q > 0$ annehmen. Bezeichnet w das Symbol $\{p, q, r\}$, so liefern dieselben Sätze folgendes:

I) *Im Falle* $p > 0, q > 0, r > 0$ *ist*

$$\{p, q, r\} = \{p, r, q\} = \{q, p, r\} = \{q, r, p\} = \{r, p, q\} = \{r, q, p\} = w.$$

II) *Im Falle* $p > 0, q > 0, r < 0$ *ist*

$$\{p, q, r\} = \{q, p, r\} = w,\ \{p, r, q\} = \{r, p, q\} = \{q, r, p\} = \{r, q, p\} = \left(\frac{p}{q}\right)_4 \left(\frac{q}{p}\right)_4 w.$$

III) *Im Falle* $p > 0,\ q < 0,\ r < 0$ *ist*

$$\{p, q, r\} = \{q, p, r\} = w.$$

In einer anderen Reihenfolge der Argumente existiert das Symbol nicht.

Ich betrachte zwei Beispiele zu I): $p = 13, q = 17, r = 257$ oder 433. In beiden Fällen ist $\left(\frac{p}{r}\right)_4 = -1$, $\left(\frac{r}{p}\right)_4 = -1$, $\left(\frac{q}{r}\right)_4 = 1$, $\left(\frac{r}{q}\right)_4 = -1$. Trotzdem ist, wie man leicht ausrechnet, $\{13, 17, 257\} = -1$, $\{13, 17, 433\} = 1$. Dies bestätigt die obige Bemerkung.

Aus den Sätzen 1, 2, 3, 4 und aus **23** erkennt man folgendes: Sind $p_1, p_2, \ldots, p_t$ verschiedene positive ungerade Primzahlen mit $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1$ $(1 \leqq i < j \leqq t)$ und ist jede der Zahlen a_1, a_2, a_3 ein Produkt aus einigen verschiedenen p_i mit $(a_1, a_2, a_3) = 1$, so ist $\{a_1, a_2, a_3\}$ ein Produkt aus einigen Symbolen $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)_4$ $(i, j = 1, 2, \ldots, t;\ i \neq j)$ und $\{p_i, p_j, p_k\}$ $(1 \leqq i < j < k \leqq t)$.

25. Wir wollen sehen, was für Symbole sich aus zwei verschiedenen negativen ungeraden Primzahlen p, q bilden lassen. Man kann $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ annehmen. Existiert $\{a_1, a_2, a_3\}$, wobei jede der Zahlen a_1, a_2, a_3 entweder p oder q oder pq ist, so müssen nach **23** a_1, a_2, a_3 paarweise verschieden sein; also muß a_1, a_2, a_3 eine Permutation von p, q, pq sein. Offenbar kommen nach Satz 1 nur $\{p, pq, q\}$ und $\{pq, p, q\}$ in Frage. Diese Symbole existieren auch und haben nach (32) den gemeinsamen Wert $\left(\frac{2}{p}\right)$.

26. Wir wollen ferner diejenigen Symbole untersuchen, die man aus drei verschiedenen negativen ungeraden Primzahlen p, q, r bilden kann. Man kann offenbar

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1$$

annehmen. Fordert man wieder, daß in $\{a_1, a_2, a_3\}$ jedes a_i ein Produkt aus einigen verschiedenen der Zahlen p, q, r sein soll, so erkennt man aus (19), daß im zweiten Falle nur $a_1 = pqr$ und $a_2 = pqr$ in Frage kommt; $a_1 = a_2$ ist jedoch nach **23** unmöglich. Im ersten Fall müssen wegen (19) a_1 und a_2 unter den Zahlen p, pq, qr, pqr, dagegen a_3 unter r, pq, qr, pqr gewählt werden. Dabei muß wieder $a_1 \neq a_2$ sein, und somit existieren offenbar nur $x_1 = \{p, pq, r\}$, $x_2 = \{p, pq, qr\}$, $x_3 = \{p, qr, r\}$, $x_4 = \{p, qr, pq\}$, $x_5 = \{p, qr, pqr\}$, $x_6 = \{pq, pqr, r\}$. Nach Satz 3 und nach (32) ist aber $x_1 x_2 = x_1 x_3 = \left(\frac{2}{p}\right)$, $x_3 x_4 = x_5 = 1$, $x_6 = \left(\frac{2}{pq}\right)$. Daher läßt sich alles auf das einzige Symbol $x_1 = \{p, pq, r\}$ zurückführen.

Der Wert dieses Symbols läßt sich in folgender Weise bestimmen: Man nimmt eine Lösung von

$$u^2 - pv^2 + qw^2 = 0$$

in relativ primen ganzen Zahlen u, v, w. Wegen $2 \nmid v$, $2 \mid uw$ läßt sich das Vorzeichen von v so wählen, daß $v \equiv uw + 1 \pmod 4$ ist. Bedeutet dann $\mathfrak{r}$ denjenigen Primidealfaktor von r in $R(\sqrt{p})$, für den $\left(\frac{\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ gilt, so ist

$$\{p, pq, r\} = \left(\frac{2}{r}\right)^u \left(\frac{u + v\sqrt{p}}{\mathfrak{r}}\right).$$

Es ist nämlich $(pv)^2 - pu^2 - pqw^2 = 0$, woraus sich nach **14** die Behauptung leicht bestätigen läßt.

27. Schließlich betrachte ich noch das Beispiel $\{pq, rs, u\}$, wobei p, q, r, s, u solche fünf verschiedenen positiven ungeraden Primzahlen sind, daß jede der Zahlen p, q, r, s quadratischer Nichtrest jeder anderen, aber quadratischer Rest von u ist. Dann existiert obiges Symbol, und nach Satz 3 ist

$$\{pq, rs, u\} = \{pq, pr, u\}\{pq, ps, u\},$$

wobei die Faktoren rechts offenbar auch existieren, aber nur noch je vier Primzahlen enthalten.

Bemerkung. Nennen wir die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von $a_1 a_2 a_3$ die Ordnung des Symbols $\{a_1, a_2, a_3\}$, so entsteht das schon in der Einleitung erwähnte Problem, nämlich ein Symbol als Produkt von Faktoren niedrigerer Ordnung darzustellen. Läßt sich eine solche „Reduktion" nicht ausführen, so nenne ich das Symbol irreduzibel. (Irreduzibel ist z. B. das Symbol $\{p, q, r\}$ in **24.**) Im obigen Beispiel haben wir eine solche Reduktion ausgeführt. Ich kann jedoch nicht angeben, wie eine Reduktion im allgemeinen durchzuführen sei, ja nicht einmal, ob die Ordnungen der irreduziblen Symbole unter einer Schranke bleiben.

§ 4.

28. In diesem Paragraphen sei ein beliebiger quadratischer Zahlkörper $R(\sqrt{D})$ gegeben. D sei seine Diskriminante, t bedeute die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von D. Es mögen ferner die Zahlen e_{2^n} dieselbe Bedeutung haben wie in der Einleitung.

Über die schon in der Einleitung betrachteten D-Zerfällungen seien noch folgende bekannte Tatsachen erwähnt. Die Anzahl der verschiedenen D-Zerfällungen ist 2^{t-1}. Sie bilden eine abelsche Gruppe vom Typ $(2, 2, \ldots, 2)$ nach folgender Zusammensetzungsregel: Die aus den D-Zerfällungen D_1, D_2 und E_1, E_2 zusammengesetzte D-Zerfällung entsteht aus dem Zahlenpaar $D_1 E_1, D_2 E_1$ nach Streichen von geeigneten Quadratfaktoren. Das Einheitselement ist die uneigentliche D-Zerfällung $1, D$. Die eigentliche D-Zerfällung D_1, D_2 heißt von der n-ten Art, wenn es einen unverzweigten zyklischen Körper $k/R(\sqrt{D})$ gibt, der vom Grade 2^n ist und $R(\sqrt{D}, \sqrt{D_1})$ enthält; auch $1, D$ ist zu den D-Zerfällungen n-ter Art zu rechnen. Die D-Zerfällungen n-ter Art bilden für sich eine Gruppe der Ordnung $2^{e_{2^n}}$; anders ausgedrückt: e_{2^n} ist die Anzahl der unabhängigen D-Zerfällungen n-ter Art.

Zur Bestimmung von e_{2^n} gilt es also, von einer D-Zerfällung zu entscheiden, ob sie von n-ter Art ist. Von erster Art sind alle D-Zerfällungen. Das Kriterium für D-Zerfällungen zweiter Art habe ich in der Einleitung angegeben. Die Definition von Reichardt [7]) läßt sich für $n = 3$ folgendermaßen aussprechen: Eine eigentliche D-Zerfällung D_1, D_2 zweiter Art ist dann und nur dann von dritter Art, wenn es für irgendeine zu dem Paar $a_1 = D_1, a_2 = D_2$ aus (1), (2) bestimmte Zahl $\alpha_2 = \alpha$ ein Produkt $\overline{D}$ aus einigen verschiedenen Primdiskriminantenfaktoren von D gibt (auch $\overline{D} = 1$ ist nicht auszuschließen), so daß für die Primidealfaktoren $\mathfrak{p}$ von D in $k_1 = R(\sqrt{D_1})$

$$\left(\frac{\alpha \overline{D}}{\mathfrak{p}}\right) \neq -1 \tag{56}$$

gilt.

Man erkennt, daß diese Definition mit der Reichardtschen übereinstimmt: Die Zahl α_1 bei Reichardt ist dadurch bestimmt, daß α_1 für $a_1 = D_1, a_2 = D_2$ unsere Bedingungen (1) und (2′) befriedigt. Auch die Bedingungen (7), (8) sind jetzt erfüllt, weil D_1, D_2 eine D-Zerfällung zweiter Art ist. Nach **5** ist also dieses α_1 tatsächlich eine passende Zahl α in (56).

Wir wollen nun die Reichardtsche Definition umformen, um dadurch ein mit unseren neuen Symbolen ausgedrücktes Kriterium für die D-Zerfällungen dritter Art zu gewinnen.

Es sei $D = d_1 d_2 \cdots d_t$ die Zerlegung von D in Primdiskriminantenfaktoren, wobei die Reihenfolge der Faktoren beliebig, aber fest gewählt ist. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_t$ die verschiedenen Primfaktoren von D. Ich führe für spätere Zwecke die quadratische

Matrix ein:

$$M_2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{d_1 D}{p_1}\right) & \left(\frac{d_2}{p_1}\right) & \dots & \left(\frac{d_t}{p_1}\right) \\ \left(\frac{d_1}{p_2}\right) & \left(\frac{d_2 D}{p_2}\right) & \dots & \left(\frac{d_t}{p_2}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{d_1}{p_t}\right) & \left(\frac{d_2}{p_t}\right) & \dots & \left(\frac{d_t D}{p_t}\right) \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Bei dieser Matrix benutze ich als Zeilen- und Spaltenindizes statt $1, 2, \dots, t$ die Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_t$ bzw. $d_1, d_2, \dots, d_t$. Das Element zum Indexpaar p_i, d_j in M_2 ist also $\left(\frac{d_j}{p_i}\right)$, nur in den Diagonalgliedern tritt im Zähler noch der Faktor D auf.

Zu α möge im Sinne von (2′) das Ideal $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$ gehören (es ist unverändert

$$a_1 = D_1, \quad a_2 = D_2$$

gesetzt). Dann ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') = 1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = D_2$. Offenbar hat $p_i (i = 1, 2, \dots, t)$ einen einzigen Primidealfaktor $\mathfrak{p}_i$ in $k_1 = R(\sqrt{D_1})$, für den $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_i}\right)$ nicht verschwindet; es muß nämlich für $p_i | D_2$ auch $\mathfrak{p}_i | \mathfrak{a}_2'$ gelten, während $\mathfrak{p}_i$ für $p_i | D_1$ wegen $p_i = \mathfrak{p}_i^2$ auch eindeutig bestimmt ist. Für diese Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_t$ setze ich

$$x_i = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \dots, t). \tag{58}$$

Nach **6** und **7** kann man α durch $\alpha\overline{D}$ ersetzen, und somit bestimmt auch $\alpha\overline{D}$ ein entsprechendes System von Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\mathfrak{p}}_2, \dots, \bar{\mathfrak{p}}_t$, so daß $\left(\frac{\alpha\overline{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_1}\right), \left(\frac{\alpha\overline{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_2}\right), \dots, \left(\frac{\alpha\overline{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_t}\right)$ nicht verschwinden. Dann läßt sich die Bedingung (56) durch

$$\left(\frac{\alpha\overline{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right) = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, t) \tag{56′}$$

ersetzen. Diese läßt sich nun aber in der Form

$$x_i \left(\frac{\overline{D} D^u}{p_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \dots, t) \tag{56″}$$

schreiben, wobei $u = 0$ für $p_i \nmid \overline{D}$ und $u = 1$ für $p_i | \overline{D}$ zu setzen ist.

Es ist nämlich entweder $\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i$ oder $\bar{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i' \neq \mathfrak{p}_i$. Im zweiten Fall berücksichtigen wir, daß nach (1) $\alpha\alpha' \underset{(2)}{\equiv} D_2$ und $\left(\frac{D_1}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1$ gilt, woraus

$$\left(\frac{\alpha\overline{D}}{\mathfrak{p}_i'}\right) = \left(\frac{\alpha'\overline{D}}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{\alpha\overline{D}D_2}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{\alpha\overline{D}D}{\mathfrak{p}_i}\right)$$

folgt. In beiden Fällen ist also

$$\left(\frac{\alpha\overline{D}}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right) = \left(\frac{\alpha}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right)\left(\frac{\overline{D}D^u}{\mathfrak{p}_i}\right), \tag{59}$$

wobei u den Wert 0 oder 1 hat und der zweite Faktor auf der rechten Seite von Null verschieden ist.

Ist $p_i \mid D_1$, so ist wegen $\left(\frac{D_2}{p_i}\right) = 1$ auch $\left(\frac{D_2}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1$. Es ist dann also

$$\left(\frac{D}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left(\frac{D_1}{\mathfrak{p}_i}\right)\left(\frac{D_2}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1,$$

und dies bedeutet, daß man in diesem Falle u in (59) beliebig wählen darf.

Ist aber $p_i \mid D_2$, so ist p_i im Körper $R(\sqrt{D_1}, \sqrt{\overline{D}D^u})$, also auch im Körper $R(\sqrt{\overline{D}D^u})$ nicht verzweigt. In diesem Falle muß also p_i prim zur Diskriminante dieses Körpers sein, die den Wert $\overline{D}$ oder $\frac{D}{\overline{D}}$ hat, je nachdem $u = 0$ oder 1 ist.

In beiden Fällen darf man also annehmen, daß u in (59) so gewählt ist wie in (56″). Dann ist $\mathfrak{p}_i$ prim zur Diskriminante von $R(\sqrt{\overline{D}D^u})$, und somit läßt sich $\mathfrak{p}_i$ im zweiten Faktor auf der rechten Seite von (59) mit Hilfe einer Nennertransformation durch p_i ersetzen. Nach (58) ist also die Behauptung über (56″) bewiesen.

(56″) kann man offenbar in der Form

$$(56''') \qquad x_i \prod_{d_j \mid \overline{D}} a_{p_i d_j} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

schreiben, wobei $a_{p_i d_j}$ das zum Indexpaar p_i, d_j gehörende Element von M_2 ist und d_j alle Primdiskriminantenfaktoren von $\overline{D}$ durchläuft.

29. Ich unterbreche nun unsere Überlegungen durch folgende Betrachtungen. Es sei $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqq 1)$ ein n-gliedriger Vektor, dessen Komponenten x_i den Wert $+1$ oder -1 haben. Ist $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ein zweiter derartiger Vektor, so soll das Produkt XY durch $XY = (x_1 y_1, x_2 x_2, \ldots, x_n y_n)$ definiert werden. Die Vektoren $X_1, X_2, \ldots, X_r$ nenne ich (im multiplikativen Sinne) unabhängig, wenn ein Produkt

$$X_1^{c_1} X_2^{c_2} \cdots X_r^{c_r}$$

mit $c_i = 0$ oder 1 $(i = 1, 2, \ldots, r)$ nur für $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$ der Einheitsvektor, d. h. der Vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ ist. (Dabei ist natürlich $X^1 = X$ und $X^0 = (1, 1, \ldots, 1)$ gesetzt.)

Hat eine rechteckige Matrix $M = (a_{ik})$ lauter Elemente ± 1, so verstehe ich unter ihrem multiplikativen Rang die größte Anzahl unabhängiger Zeilenvektoren. Der Rang bleibt ungeändert, wenn man ihn statt mit Hilfe der Zeilenvektoren mit den Spaltenvektoren definiert. Dies folgt nämlich aus dem entsprechenden Satze über den gewöhnlichen Rang von Matrizen im Primkörper der Charakteristik 2, wenn man a_{ik} in der Form $(-1)^{c_{ik}}$ $(c_{ik} = 0$ oder $1)$ schreibt und c_{ik} als ein Element dieses Primkörpers auffaßt, wodurch eine Korrespondenz zwischen der Multiplikation von Zeilen- oder Spaltenvektoren von (a_{ik}) und der Addition der entsprechenden Vektoren von (c_{ik}) entsteht.

30. Ich bezeichne mit M_x diejenige Matrix, die aus M_2 entsteht, wenn man als letzte Spalte noch die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_t$ hinzufügt. Dann bedeutet (56‴), daß der letzte Spaltenvektor von M_x das Produkt aus einigen Spaltenvektoren von M_2 ist, d. h. daß M_x und M_2 denselben multiplikativen Rang haben. Dies kann man, wenn man den Rang mittels Zeilenvektoren deutet, auch so aussprechen, daß die Zeilenvektoren von M_2, deren Produkt der Einheitsvektor ist, diese Eigenschaft auch dann behalten, wenn die Zeilen von M_2 durch die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_t$ zu Zeilen von M_x ergänzt werden. Die Gleichungen (56‴) lassen sich also in folgender Form ausdrücken:

Bestehen für einen rationalen quadratfreien Teiler m von D die Beziehungen

$$\prod_{p_i \mid m} a_{p_i d_j} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, t), \tag{60}$$

so ist immer

$$\prod_{p_i \mid m} x_i = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right) = 1, \tag{61}$$

wobei $\mathfrak{m}$ das Produkt derjenigen der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$ ist, die in m aufgehen. Insbesondere ist also $N_{k_1}\mathfrak{m} = m$.

Um nun (60) umzuformen, bemerken wir zunächst, daß das Produkt aller Elemente einer jeden Zeile von M_2 gleich 1 ist. Man kann also ohne weiteres eine beliebige Gleichung in (60) streichen. Dies führen wir jedoch nur im Falle $2 \mid D$ aus, indem wir dann nur diejenigen Werte für j zulassen, für die $p_j \neq 2$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist $d_j = p_j$, und somit geht (60) nach (57) in

$$\left(\frac{p_j}{m}\right) = 1 \ (p_j \nmid m), \qquad \left(\frac{p_j}{p_j m}\right)\left(\frac{p_j D}{p_j}\right) = 1 \ (p_j \mid m)$$

über, wobei $j = 1, 2, \ldots, t$ zu setzen ist mit der Einschränkung $p_j \neq 2$. Es kommt auf das Vorzeichen von m nicht an, und somit dürfen wir $m > 0$ annehmen. Dann entsteht aus diesen Gleichungen, wenn wir gleich p statt p_j schreiben,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = 1 \ (p \nmid m), \qquad \left(\frac{-Dm}{p}\right) = 1 \ (p \mid m).$$

Hier durchläuft p alle ungeraden Primfaktoren von D. Da D_1, D_2 eine D-Zerfällung zweiter Art ist, läßt sich in der zweiten Gleichung D durch D_1 oder D_2 ersetzen, je nachdem $p \mid D_1$ oder $p \mid D_2$ ist.

In dieser Form ist (60) nichts anderes als der Fall $j = 3$ von (19) und die Fälle $i = 1, 2$; $j = 3$ von (20), wenn man sich dort die Werte $a_1 = D_1$, $a_2 = D_2$, $a_3 = m$ eingesetzt denkt. Nun sind die übrigen Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt, weil D_1, D_2 eine D-Zerfällung zweiter Art und $m \mid D$ ist (insbesondere ist jetzt der Fall $i = 1, j = 2$ von (20) inhaltlos). Daher ist (60) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Symbol $\{D_1, D_2, m\}$ existiert.

Weiter ist die linke Seite von (61) ein Fall von (3) für dieses Symbol $\{D_1, D_2, m\}$, also besagt (61), daß dies gleich 1 ist. Aus dem oben angegebenen Reichardtschen Kriterium erhalten wir somit den folgenden

Satz 6. *Eine eigentliche D-Zerfällung D_1, D_2 zweiter Art ist dann und nur dann von der dritten Art, wenn für die positiven quadratfreien Teiler m von D, für welche das Symbol $\{D_1, D_2, m\}$ existiert, dieses den Wert 1 hat.*

Die Zahlen m, für die das Symbol $\{D_1, D_2, m\}$ existiert, stimmen unabhängig von der besonderen Wahl von D_1, D_2 mit denjenigen Produkten

$$p_x p_y \cdots p_u \qquad (1 \leqq x < y < \cdots < u \leqq t)$$

überein, für welche das Produkt der zu den Indizes $p_x, p_y, \ldots, p_u$ gehörenden Zeilenvektoren der Matrix M_2 der Einheitsvektor ist. Die Anzahl dieser Zahlen m (auch $m = 1$ mitgerechnet) ist 2^{e_1+1}.

Wird für diese Zahlen eine beliebige 2-unabhängige Basis[28]) *$m_1, m_2, \ldots, m_{e_1+1}$ ge-*

[28]) Eine 2-unabhängige Basis einer Gruppe ist ein System $x_1, x_2, \ldots, x_r$ aus möglichst wenig Gruppenelementen, so daß alle Elemente der Gruppe in der Form $x \underset{(2)}{=} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ darstellbar sind.

wählt, so folgt schon aus $\{D_1, D_2, m_i\} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, e_4 + 1)$, *daß* D_1, D_2 *eine D-Zerfällung dritter Art ist.*

Wird auch für die D-Zerfällungen zweiter Art eine beliebige unabhängige Basis D_1', D_2'; $D_1'', D_2'', \ldots, D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}$ *gewählt und bedeutet* r_4 *den multiplikativen Rang der Matrix*

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{D_1', D_2', m_1\} & \{D_1'', D_2'', m_1\} & \cdots \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, m_1\} \\ \{D_1', D_2', m_2\} & \{D_1'', D_2'', m_2\} & \cdots \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, m_2\} \\ \cdots\cdots\cdots\

Zuerst bemerke ich, daß man die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ in Satz 6 für negatives D immer so wählen kann, daß $m_{e_4+1} \underset{(2)}{=} -D$ gilt. Bildet man nämlich das entsprechende Produkt der Zeilenvektoren in (57), so entsteht offenbar ein Vektor mit den Komponenten $\left(\frac{d_i}{d_i D}\right)\left(\frac{d_i D}{d_i}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Dieses Produkt ist aber wegen $D < 0$ gleich 1, was die Behauptung bestätigt. Die einzige Ausnahme wäre der Fall $-D \underset{(2)}{=} 1$, d. h. $D = -4$; dieser Fall kommt jedoch nicht in Betracht, weil es dann überhaupt keine eigentliche D-Zerfällung gibt. Nach (32) ist jetzt weiter für jede D-Zerfällung D_1, D_2 zweiter Art $\{D_1, D_2, D\} = 1$. Dies bedeutet, daß man für $D < 0$ in Satz 6 die letzte Zeile von M_4 streichen darf, wenn man nur die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4}$ so wählt, daß sogar diese Zahlen und $-D$ 2-unabhängig sind.

Um in Einklang mit den früheren Bezeichnungen zu bleiben, bezeichne ich p, q, r, s, u der Reihe nach auch mit $p_1, p_2, \ldots, p_5$.

Für $R(\sqrt{pqr})$ geht (57) in

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über. Also ist $r_2 = 1$, $e_4 = 1$, und p, qr ist die einzige eigentliche D-Zerfällung zweiter Art. Man kann $m_1 = r$ wählen. (Bei den Anwendungen kommt es ja auf das Vorzeichen der Zahlen m_i nicht an.) Es bleibt nach Berücksichtigung der obigen Bemerkung in M_4 nur das einzige Element $\{p, qr, r\}$ übrig. Also ist $e_8 = 1$ oder 0, je nachdem dieses Symbol gleich 1 oder -1 ist. Man kann übrigens nach **26** statt dieses Symbols das Produkt $\left(\frac{2}{p}\right)\{p, pq, r\}$ nehmen, welches sich leichter berechnen läßt.

Für $R(\sqrt{pqrs})$ geht (57) in

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über. Es ist also $r_2 = 2$, $e_4 = 1$, und pq, rs ist die einzige eigentliche D-Zerfällung zweiter Art. Man kann $m_1 = s$, $m_2 = qrs$ wählen. Dann wird

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{pq, rs, s\} \\ \{pq, rs, qrs\} \end{pmatrix}.$$

Das obere Symbol läßt sich durch das Produkt $\{p, rs, s\}\{q, rs, s\}$ ersetzen, da beide Faktoren offenbar existieren. Das untere Symbol kann man mit $\{q, rs, qrs\}$ multiplizieren, weil dies nach dem oben Bemerkten gleich 1 ist. So entsteht $\{p, rs, qrs\}$. Wieder kann man dies mit $\{p, rs, prs\} = 1$ multiplizieren, wodurch man $\{p, rs, pq\}$ und daraus weiter nach den Sätzen 4 und 3 $\{p, pq, rs\} = \{p, pq, r\}\{p, pq, s\}$ bekommt. Dieses Produkt läßt sich schließlich nach **26** durch $\{p, qr, r\}\{p, qs, s\}$ ersetzen. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Es ist $e_8 = 1$ oder 0, je nachdem die Gleichungen

$$\{p, qr, r\}\{p, qs, s\} = 1, \quad \{p, rs, s\}\{q, rs, s\} = 1$$

gelten oder nicht. Vergleichen wir dies mit dem oben Gesagten, so erhalten wir den folgenden interessanten Zusammenhang: Unter den gemachten Voraussetzungen ist im Körper $R(\sqrt{pqrs})$ (mit $e_4 = 1$) dann und nur dann $e_8 = 1$, wenn e_8 für die Körper $R(\sqrt{pqr})$, $R(\sqrt{pqs})$ den gleichen Wert hat (0 oder 1) und wenn das gleiche auch für $R(\sqrt{prs})$, $R(\sqrt{qrs})$ gilt.

Für $R(\sqrt{pqrsu})$ wird die Matrix (57)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $r_2 = 2$, $e_4 = 2$. Man kann $p, qrsu$ und pqr, su als eine unabhängige Basis für die D-Zerfällungen zweiter Art wählen. Auch jetzt kann man die letzte Zeile von M_4 fortlassen, indem man $m_1 = u$, $m_2 = rsu$ setzt. Dann bleibt

$$\begin{pmatrix} \{p, qrsu, u\} & \{pqr, su, u\} \\ \{p, qrsu, rsu\} & \{pqr, su, rsu\} \end{pmatrix}$$

übrig. Diese Matrix läßt sich nach leichter Rechnung in

$$\begin{pmatrix} (pqu)\,(pru)\,(psu) & (psu)\,(qsu)\,(rsu) \\ (pqr)\,(pqs)\,(pqu) & (prs)\,(pru)\,(qrs)\,(qru) \end{pmatrix}$$

verwandeln, wobei (xyz) als Abkürzung für $\{x, yz, z\}$ gesetzt worden ist. Aus dieser Matrix ermittelt man nach Satz 6 den Wert von e_8.

§ 5.

32. Wir beweisen folgenden

Satz 7. *Es gibt unendlich viele quadratische Zahlkörper, für die* $e_2 \geqq e_4 \geqq e_8 \geqq 0$ *beliebig vorgegeben sind.*

Den sich auf den Fall $e_4 = e_8 = 0$ beziehenden Teil des Satzes habe ich schon früher bewiesen[29]), so daß es genügt, nur noch den Fall $e_4 \geqq 1$ zu betrachten.

Es seien $u \geqq v \geqq w \geqq 0$ drei beliebige ganze Zahlen mit $v \geqq 1$. Ich setze $t = u + 1$ und wähle verschiedene ungerade positive Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_t$ derart, daß es zur Diskriminante $d = p_{v+1} p_{v+2} \cdots p_t$ keine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art gibt[29]) und jede der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_v$ quadratischer Rest mod d ist. Dann setze ich

$$D = p_1 p_2 \cdots p_t.$$

Für den Körper $R(\sqrt{D})$ ist $e_2 = t - 1 = u$. Weiter ist eine beliebige D-Zerfällung D_1, D_2 dann und nur dann von zweiter Art, wenn $d \mid D_1$ oder $d \mid D_2$ gilt. Somit ist jetzt $\frac{D}{p_i}, p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$ eine unabhängige Basis für die D-Zerfällungen zweiter Art. Daraus folgt $e_4 = v$. Es genügt, noch zu beweisen, daß man auf unendlich viele Arten $p_1, p_2, \ldots, p_t$ so wählen kann, daß $e_8 = w$ wird. In (62) wähle ich die obige Basis für die D-Zerfällungen zweiter Art. Offenbar läßt sich für $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ das System $p_0, p_1, \ldots, p_v$ nehmen, wobei ich der Gleichmäßigkeit halber d mit p_0 bezeichnet habe (p_0 ist im allgemeinen keine Primzahl!). Dann ist $D = p_1 p_2 \cdots p_v$ und

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{p_1 D, p_1, p_0\}\,\{p_2 D, p_2, p_0\} \cdots \{p_v D, p_v, p_0\} \\ \{p_1 D, p_1, p_1\}\,\{p_2 D, p_2, p_1\} \cdots \{p_v D, p_v, p_1\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{p_1 D, p_1, p_v\}\,\{p_2 D, p_2, p_v\} \cdots \{p_v D, p_v, p_v\} \end{pmatrix}.$$

Ich betrachte das System

$$S_v = (\{p_i, p_j, p_l\}) \qquad (0 \leqq i \leqq j \leqq l \leqq v;\ i \neq l).$$

Aus den Sätzen 1, 2, 3, 4 erkennt man, daß sich alle Elemente von M_4 darstellen lassen

[29]) Vgl. [11]).

als Produkt aus einigen Elementen von S_v. Diese Darstellung ist eindeutig bestimmt, wenn gleiche Faktoren ausgeschlossen werden. Es ist nämlich z. B.

$$\{p_1 D, p_1, p_0\} = \{p_0, p_0, p_1\}\{p_0, p_1, p_2\}\{p_0, p_1, p_3\}\cdots\{p_0, p_1, p_v\},$$
$$\{p_1 D, p_1, p_1\} = \{p_0, p_1, p_1\}\{p_1, p_1, p_2\}\{p_1, p_1, p_3\}\cdots\{p_1, p_1, p_v\}.$$

Man erkennt auch, daß das Element der Hauptdiagonale von M_4, welches in der i-ten Zeile steht, den Faktor $\{p_0, p_i, p_i\}$ enthält, während die Elemente des Teilsystems

$$T = (\{p_0, p_i, p_i\}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, v)$$

in den anderen Elementen von M_4 aber nicht mehr als Faktoren auftreten. Gibt es also genau x Elemente in T, die den Wert -1 haben und sind alle übrigen Elemente von S_v gleich 1, so ist der multiplikative Rang von M_4 gleich x, woraus nach Satz 6 folgt $e_8 = e_4 - x$. Demnach haben wir unseren Satz bewiesen, wenn wir folgendes bestätigt haben: Es lassen sich $p_0, p_1, \ldots, p_v$ auf unendlich viele Arten so wählen, daß S_v in ein beliebig vorgegebenes Wertsystem übergeht.

Statt dessen genügt es offenbar, folgendes zu beweisen: Bei beliebig festgewählten $p_1, p_2, \ldots, p_{v-1}$ läßt sich p_v auf unendlich viele Arten so wählen, daß das System

$$S_v - S_{v-1} = U_v = (\{p_i, p_j, p_v\}) \qquad (0 \leqq i \leqq j \leqq v;\ i \neq v) \tag{63}$$

in ein beliebig vorgeschriebenes Wertsystem übergeht.

Es bedeute k_i den Körper $R(\sqrt{p_i})$ für $i = 0, 1, \ldots, v-1$. Ich bezeichne mit α_{ij} eine Zahl in k_i, die (statt α_2) für $a_1 = p_i$, $a_2 = p_j$ den Bedingungen (1), (2) genügt $(0 \leqq i < j \leqq v-1)$. Weiter bezeichne ich mit $\mathfrak{p}_i$ einen beliebigen Primidealfaktor von p_v in k_i $(i = 0, 1, \ldots, v-1)$. Dann gilt nach der Definition in **1**

$$\{p_i, p_j, p_v\} = \left(\frac{\alpha_{ij}}{\mathfrak{p}_i}\right) \qquad (0 \leqq i < j \leqq v-1). \tag{64}$$

(Ist $v = 1$, so fällt dies natürlich weg.) Außerdem ist nach (53)

$$\{p_i, p_v, p_v\} = \left(\frac{p_i}{p_v}\right)_4 = \left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{p}_i}\right) \qquad (0 \leqq i \leqq v-1). \tag{65}$$

Es bedeute noch k_* den Körper $R(\sqrt{-1})$. Für $i = 0, 1, \ldots, v$ bezeichne ich mit a_{*i} eine ganze Zahl in k_* mit der Norm p_i, für die $a_{*i} \equiv 1 \pmod{(1-\sqrt{-1})^3}$ gilt. Für a_{*v} schreibe ich einfacher α_*. Dann bestehen die Gleichungen[30])

$$\left(\frac{p_i}{p_v}\right)_4 \left(\frac{p_v}{p_i}\right)_4 = \left(\frac{\alpha_{*i}}{\alpha_*}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, v-1).$$

Daraus folgt nach (65) und (53′)

$$\{p_i, p_v, p_v\}\{p_i, p_i, p_v\} = \left(\frac{\alpha_{*i}}{\alpha_*}\right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, v-1). \tag{66}$$

Mit $\bar{U}_v$ bezeichne ich die Gesamtheit der Symbole

$$\left(\frac{\alpha_{ij}}{\mathfrak{p}_i}\right), \left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{p}_i}\right), \left(\frac{\alpha_{*i}}{\alpha_*}\right) \tag{67}$$

in (64), (65), (66). Offenbar läßt sich dann in der obigen Behauptung U_v durch $\bar{U}_v$ ersetzen.

Mit Rücksicht darauf, daß die Primideale $\alpha_*, \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, v-1)$ in den Körpern k_*, k_i unter den beiden konjugierten Faktoren von p_v beliebig gewählt werden

[30]) Vgl. die erste in [8]) angeführte Arbeit, S. 140, Zeile 6 von unten.

können, sieht man durch Anwendung der Nennertransformation, daß man hier alle Nenner durch einen beliebigen Primidealfaktor $\mathfrak{P}$ von p_v im Körper $K_{v-1} = k_* k_0 k_1 \cdots k_{v-1}$ ersetzen kann. Die so aus (67) entstehenden Symbole

$$\left(\frac{\alpha_{ij}}{\mathfrak{P}}\right), \left(\frac{\sqrt{p_i}}{\mathfrak{P}}\right), \left(\frac{\alpha_{*i}}{\mathfrak{P}}\right) \tag{68}$$

sind im Körper K_{v-1} zu deuten. Offenbar ist $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade.

Ist umgekehrt $\mathfrak{P}$ ein beliebiges ungerades Primideal ersten Grades in K_{v-1}, so stimmt (68) mit (67) überein, wobei $p_v = N_{K_{v-1}}\mathfrak{P}$ zu setzen ist. Um die Behauptung über (63) zu beweisen, genügt es also nach einem bekannten Satze[31]), wenn wir zeigen, daß alle Zähler in (68) im Körper K_{v-1} 2-unabhängig sind, d. h. daß eine Gleichung

$$\prod_{0 \leqq i < j \leqq v-1} \alpha_{ij}^{x_{ij}} \prod_{i=0}^{v-1} (\sqrt{p_i})^{y_i} \prod_{i=0}^{v-1} \alpha_{*i}^{z_i} = \alpha^2, \tag{69}$$

wo jeder Exponent auf der linken Seite gleich 0 oder 1 ist und α eine Zahl in K_{v-1} bedeutet, nur dann bestehen kann, wenn alle diese Exponenten verschwinden.

Wir nehmen also die Gültigkeit von (69) an. Offenbar kann man von vornherein voraussetzen, daß alle Zahlen α_{ij} ganz sind. Es bedeute $\mathfrak{P}_s$ einen beliebigen Primidealfaktor von p_s im Normalkörper K_{v-1} ($s = 0, 1, \ldots, v-1$). Ferner sei q_s die durch $\mathfrak{P}_s$ teilbare Primzahl (für $s = 1, 2, \ldots, v-1$ ist $q_s = p_s$). Unter den Körpern

$$k_*, k_0, k_1, \ldots, k_{v-1}$$

ist q_s nur in k_s verzweigt, und daher zerfällt q_s in K_{v-1} in folgender Art:

$$q_s = (\mathfrak{P}_s \overline{\mathfrak{P}}_s \cdots)^2. \tag{70}$$

Der Trägheitskörper von $\mathfrak{P}_s$ ist offenbar der Körper $K_{v-1}^s = k_* k_0 k_1 \cdots k_{s-1} k_{s+1} \cdots k_{v-1}$. Wegen (70) ist der Exponent von $\mathfrak{P}_s$ in einer beliebigen Zahl von K_{v-1}^s gerade. In diesem Körper liegen die Zahlen α_{ij}, $\sqrt{p_i}$, α_{*i} in (69) mit Ausnahme von α_{sj} ($j = s+1, s+2, \ldots, v-1$) und $\sqrt{p_s}$. Auch in α_{sj} ist der Exponent von $\mathfrak{P}_s$ gerade, weil α_{sj} die Bedingung (2) befriedigt, aus der nämlich folgt, daß die Diskriminante von $k_s(\sqrt{\alpha_{sj}})/k_s$ ein Teiler von p_j, also prim zu $\mathfrak{P}_s$ ist. Für $\sqrt{p_s}$ gilt dagegen offenbar $\mathfrak{P}_s \| \sqrt{p_s}$. Somit folgt aus (69) $2 \mid y_s$, d. h. $y_s = 0$. Daraus ergibt sich

$$\prod_{0 \leqq i < j \leqq v-1} \alpha_{ij}^{x_{ij}} \prod_{i=0}^{v-1} \alpha_{*i}^{z_i} = \alpha^2. \tag{69'}$$

Im Falle $v = 1$ reduziert sich die linke Seite auf $\alpha_{*0}^{z_0}$. Nun ist α_{*0} offenbar keine Quadratzahl in $K_0 = k_* k_0$, woraus $z_0 = 0$ folgt, so daß in diesem Falle die Behauptung bewiesen ist.

Ist $v \geqq 2$, so liegt die linke Seite von (69') im Körper $K_{v-2} = k_* k_0 k_1 \cdots k_{v-2}$. Wegen $K_{v-1} = K_{v-2}(\sqrt{p_{v-1}})$ ist also $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \beta\sqrt{p_{v-1}}$, wobei β eine Zahl in K_{v-2} ist. Es seien $\mathfrak{q}_*, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$ Primidealfaktoren von p_{v-1} in den Körpern $k_*, k_0, k_1, \ldots, k_{v-2}$, und zwar seien diese Primideale unter den konjugierten so gewählt, daß $\left(\frac{\alpha_{*v-1}}{\mathfrak{q}_*}\right) = 0$, $\left(\frac{\alpha_{i,v-1}}{\mathfrak{q}_i}\right) = 0$ ist. Das ist nach der Definition der Zahlen α_{*x}, α_{xy} möglich, und zwar ist $\alpha_{*v-1} \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{q}_*$, $\alpha_{i,v-1} \underset{(2)}{\equiv} \mathfrak{q}_i$ (insbesondere ist $\mathfrak{q}_* = \alpha_{*v-1}$). Offenbar ist der Beitrag der Zahlen α_{ij} ($0 \leqq i < j \leqq v-2$), α_{*i} ($0 \leqq i \leqq v-2$) zu p_{v-1} ein

[31]) Bericht Ia, Satz 11.

Idealquadrat in K_{v-2}. Man könnte sogar von vornherein annehmen, daß diese Zahlen zu p_{v-1} prim sind. Aus (69′) folgt dann

$$\mathfrak{q}_*^{z_{v-1}} \prod_{i=0}^{v-2} \mathfrak{q}_i^{x_{i,v-1}} \underset{(2)}{=} 1 \text{ oder } p_{v-1}. \tag{71}$$

Diese Gleichung ist im Körper K_{v-2} zu deuten.

Alle Primidealfaktoren von p_{v-1} in K_{v-2} erscheinen in der Form $(\bar{\mathfrak{q}}_*, \bar{\mathfrak{q}}_0, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{v-2})$, wobei $\bar{\mathfrak{q}}_*, \bar{\mathfrak{q}}_0, \bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{v-2}$ je ein konjugiertes Ideal von $\mathfrak{q}_*, \mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$ bedeuten (es ist $\bar{\mathfrak{q}}_* = \mathfrak{q}_*$ oder $\mathfrak{q}_*'$; $\bar{\mathfrak{q}}_0 = \mathfrak{q}_0$ oder $\mathfrak{q}_0'$; …). Der Exponent von $(\mathfrak{q}_*', \mathfrak{q}_0', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$ auf der linken Seite in (71) ist gleich Null, und daher kann auf der rechten Seite nur 1 stehen. Weiter ist der Exponent des Primideals $(\mathfrak{q}_*, \mathfrak{q}_0', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$ in $\mathfrak{q}_*$ gleich 1, dagegen ist dieses Ideal prim zu jedem der Ideale $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}$. Daraus folgt $z_{v-1} = 0$. Ebenso gewinnt man $x_{i,v-1} = 0$, wenn man das Primideal

$$(\mathfrak{q}_*', \mathfrak{q}_0', \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}', \mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{i+1}', \ldots, \mathfrak{q}_{v-2}')$$

zu Hilfe nimmt ($i = 0, 1, \ldots, v-2$). Indem wir auch $\alpha = \beta$ berücksichtigen, erhalten wir aus (69′)

$$\prod_{0 \le i < j \le v-2} \alpha_{ij}^{x_{ij}} \prod_{i=1}^{v-2} \alpha_{*i}^{z_i} = \beta^2 .$$

Diese Gleichung entspricht in allem der Gleichung (69′), nur mit dem Unterschied, daß $v-1$ an die Stelle von v getreten ist. Es folgt also, daß alle Exponenten x_{ij}, z_i verschwinden müssen. Damit ist die Behauptung über (69) und daher auch Satz 7 bewiesen.

§ 6.

33. In diesem Paragraphen werden wir uns mit der Frage beschäftigen, wann es in dem Körper $R(\sqrt{D})$ Einheiten mit negativer Norm gibt. Wir nehmen dabei an, daß alle Primdiskriminantenfaktoren der Diskriminante D positiv sind, da ja sonst alle Einheiten positive Norm haben. Es bedeute d die Zahl D oder $\frac{1}{4}D$, je nachdem D ungerade oder gerade ist. Dann kommt die Frage darauf hinaus, ob die Pellsche Gleichung

$$t^2 - du^2 = -1 \tag{72}$$

in ganzen Zahlen t, u lösbar ist.

Nach Dirichlet ist bekannt, daß es immer einen einzigen Teiler $m > 1$ von d gibt, für welchen die Gleichung

$$mx^2 - \frac{d}{m} y^2 = 1 \tag{73}$$

in ganzen Zahlen x, y lösbar ist. Da sich (72) in der Form $du^2 - t^2 = 1$ schreiben läßt, so ist diese Gleichung der Fall $m = d$ von (73). Daher ist (72) dann und nur dann lösbar, wenn das in (73) zulässige m gleich d ist, wie schon Dirichlet bemerkt hat. Ich nenne das in (73) zulässige m den Dirichlet-Pellschen Teiler von D. Statt der ursprünglichen Frage beschäftigen wir uns mit der Bestimmung des Dirichlet-Pellschen Teilers von D. Dieses Problem umfaßt unser ursprüngliches.

Zunächst bemerken wir folgendes: Für den Dirichlet-Pellschen Teiler m von D ist $m, \frac{D}{m}$ $\left(\text{im Falle } 2 \mid m \text{ aber } 4m, \frac{D}{4m}\right)$ eine D-Zerfällung zweiter Art. Hieraus folgt Satz A der Einleitung, denn unter den dortigen Voraussetzungen kann nur $m = d$ sein.

Ist nämlich D ungerade, so ist die Behauptung aus (73) klar. Für gerades D folgt leicht, daß m oder $\frac{d}{m} \equiv 1 \pmod 8$ ist, und so erweist sich die Behauptung wieder als richtig.

Ich beweise folgenden

Satz 8. *Der Dirichlet-Pellsche Teiler m von D genügt für alle D-Zerfällungen D_1, D_2 zweiter Art der Gleichung*

$$\{D_1, D_2, m\} = 1. \tag{74}$$

Vor allem ist nach der obigen Bemerkung und nach Satz 1 klar, daß alle Symbole in (74) existieren. Wir brauchen also nur noch die Gleichung (74) selbst zu beweisen. Dabei dürfen wir annehmen, daß D_1, D_2 eine eigentliche D-Zerfällung ist, da ja sonst (74) sicher richtig ist. Nach Satz 2 dürfen wir ferner annehmen, daß D_1 ungerade ist.

Die linke Seite von (74) bezeichne ich mit w. Dann ist

$$w = \{D_1, D_2, M\},$$

wobei $M = m$ für $2 \nmid m$ bzw. $M = 4m$ für $2 \mid m$ ist. Daher ist M immer eine Diskriminantenzahl und ein Teiler von D. Nach Satz 4 gilt also $w = \{D_1, M, D_2\}$ und weiter nach Satz 2

$$w = \{M, D_1, D_2\}. \tag{75}$$

Man kann nun ganze positive Zahlen r, s, t, u auf genau eine Weise so bestimmen, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} d &= rstu, \\ M &\underset{(2)}{\equiv} rs, && (rs > 1) \\ D_1 &= rt, && (rt > 1, \text{ ungerade}) \\ D_2 &\underset{(2)}{\equiv} su && (su > 1) \end{aligned}$$

bestehen. Die Zahlen r, s, t, u sind paarweise relativ prim, weil d quadratfrei ist. Es mögen $\mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}$ im folgenden immer solche ganzen Ideale in $R(\sqrt{rs})$ bedeuten, deren Normen r, s, t bzw. u sind. Dadurch sind $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ schon bestimmt, und auch $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ existieren, weil $M, \frac{D}{M}$ eine D-Zerfällung zweiter Art ist. Die Ideale $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ werden aber erst später fest gewählt.

Ich nehme eine bestimmte Lösung von (73). Offenbar ist x ungerade. Je nachdem $m = rs$ gerade oder ungerade ist, setze ich

$$\beta = 1 + x\sqrt{rs} \ (2 \mid rs) \quad \text{bzw.} \quad \beta = \tfrac{1}{2}(1 + x\sqrt{rs}) \ (2 \nmid rs).$$

Die Zahl β ist immer ganz, ohne rationalen Teiler, und somit gilt nach (73)

$$\beta = \mathfrak{b}^2\mathfrak{t}\mathfrak{u},$$

wobei $\mathfrak{b}$ ein ganzes Ideal in $R(\sqrt{rs})$ ist; gleichzeitig sind hierdurch $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{u}$ festgelegt.

Es sei α eine ungerade ganze Zahl mit positiver Norm in $R(\sqrt{rs})$, für die noch folgendes gilt: $\alpha \equiv 1 \pmod 4$, $\alpha = \mathfrak{a}^2\mathfrak{r}\mathfrak{t}$ mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ in $R(\sqrt{rs})$, und für die $\alpha\beta$ keine rationalen Teiler hat. Die Existenz eines solchen α sehen wir folgendermaßen ein: Aus der Existenz des Symbols in (75) folgt nach **1**, daß es eine Zahl α_1 in $R(\sqrt{rs})$ gibt, die den folgenden Bedingungen genügt: $\alpha_1\alpha_1' \underset{(2)}{\equiv} rt$, $\alpha_1 \equiv 1 \pmod 4$, $\alpha_1 = \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{r}\bar{\mathfrak{t}}$, wobei $\mathfrak{a}_1$ ein Ideal in $R(\sqrt{rs})$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ ebenso wie $\mathfrak{t}$ ein ganzes Ideal mit der Norm t in $R(\sqrt{rs})$ ist. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{a}_1$ ungerade und ganz ist. Das Ideal $\mathfrak{t}$ läßt sich so in zwei ganze Faktoren $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2$ zerlegen, daß $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2'$ ist. Bekanntlich gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{c}$ in $R(\sqrt{rs})$, so daß $\mathfrak{c}$ frei von rationalen Teilern und prim zu $2\mathfrak{b}'rst'u'$ ist und $\mathfrak{c} = \gamma\mathfrak{a}_1\mathfrak{t}_2^{-1}$ gilt, wobei γ eine ganze Zahl in $R(\sqrt{rs})$ ist. Offenbar ist $\alpha = \alpha_1\gamma^2 t_2^{-1}$ eine passende Zahl, wenn t_2 die Norm von $\mathfrak{t}_2$ ist. Denn dann gilt $\alpha = \mathfrak{c}^2\mathfrak{r}\mathfrak{t}$ und $\alpha\beta = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{t})^2\mathfrak{r}\mathfrak{u}$.

Bei dieser Wahl von α muß sein

$$\alpha = ra + b\sqrt{rs}, \quad (2 \mid b; \text{ im Falle } 2 \mid s \text{ sogar } 4 \mid b;\ a \equiv b + 1 \pmod 4),$$

$$r^2a^2 - rsb^2 = rtc^2,$$

d. h.

$$ra^2 - sb^2 - tc^2 = 0,$$

wobei a, b, c paarweise relativ prime ganze Zahlen sind. Nach der Definition in **1** ist

$$w = \{rs, rt, su\} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{s}\mathfrak{u}'}\right).$$

Wird (wieder gemäß den oben unterschiedenen Fällen)

$$\alpha\beta = re + f\sqrt{rs} \quad \text{bzw.} \quad 2\alpha\beta = re + f\sqrt{rs}$$

gesetzt, so ist $r^2e^2 - rsf^2 = -rug^2$, d. h.

$$re^2 - sf^2 + ug^2 = 0, \tag{76}$$

wobei e, f, g paarweise relativ prime ganze Zahlen sind. Insbesondere ist $e = a + sbx$, $e \equiv 1 \pmod 4$.

Es gilt

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{s}}\right) = \left(\frac{ra + b\sqrt{rs}}{\mathfrak{s}}\right) = \left(\frac{ra}{\mathfrak{s}}\right).$$

Diese Umformung ist auch im Falle $2 \mid s$ richtig, denn dann ist $4 \mid b$. Durch Nennertransformation entsteht daraus weiter

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{s}}\right) = \left(\frac{ra}{s}\right).$$

Wegen $\mathfrak{u} \mid \beta$ ist $\mathfrak{u}' \mid \beta'$, d. h. $\mathfrak{u}' \mid 1 - x\sqrt{rs}$. Es folgt also

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}'}\right) = \left(\frac{ra + b\sqrt{rs}}{\mathfrak{u}'}\right) = \left(\frac{ra + rsbx}{\mathfrak{u}'}\right),$$

wobei auch der Fall $2 \mid u$ keine Ausnahme macht, denn dann ist

$$2 \nmid rst, \quad \left(\frac{rt}{2}\right) = 1, \quad 4 \mid b, \quad 8 \mid b(1 - x\sqrt{rs}).$$

Daraus entsteht weiter

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{u}'}\right) = \left(\frac{re}{\mathfrak{u}'}\right) = \left(\frac{re}{u}\right).$$

Wir bekommen somit

$$w = \left(\frac{ra}{s}\right)\left(\frac{re}{u}\right) = \left(\frac{r}{su}\right)\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{e}{u}\right).$$

Hier ist $\left(\frac{r}{su}\right) = \left(\frac{su}{r}\right) = 1$ und nach (76)

$$1 = \left(\frac{su}{e}\right) = \left(\frac{e}{su}\right) = \left(\frac{e}{s}\right)\left(\frac{e}{u}\right) = \left(\frac{a + sbx}{s}\right)\left(\frac{e}{u}\right) = \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{e}{u}\right),$$

was ja offenbar auch im Falle $2 \mid s$ richtig ist, weil dann $4 \mid b$ gilt. Wir haben also $w = 1$ erhalten und damit unseren Satz bewiesen.

34. Ich will hier den in der Einleitung erwähnten Zusammenhang zwischen den Fragen über e_8 und über die Norm der Einheiten in $R(\sqrt{D})$ angeben. Es genügt, den Fall $e_4 > 0$ zu betrachten. Wir sehen, daß M_2 unter den jetzigen Annahmen über D symmetrisch ist. Daraus folgt, daß man jetzt für die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_{e_4+1}$ in Satz 6 $D_1', D_1'', \ldots, D_1^{(e_4)}, D$ wählen kann, die ja 2-unabhängig sind. Dann geht (62) in

$$M_4 = \begin{pmatrix} \{D_1', D_2', D_1'\} & \{D_1'', D_2'', D_1'\} & \cdots & \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, D_1'\} \\ \{D_1', D_2', D_1''\} & \{D_1'', D_2'', D_1''\} & \cdots & \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, D_1''\} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{D_1', D_2', D_1^{(e_4)}\} & \{D_1'', D_2'', D_1^{(e_4)}\} & \cdots & \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, D_1^{(e_4)}\} \\ \{D_1', D_2', D\} & \{D_1'', D_2'', D\} & \cdots & \{D_1^{(e_4)}, D_2^{(e_4)}, D\} \end{pmatrix}$$

über. Ich bezeichne mit $m > 1$ wieder eine quadratfreie Zahl, für die $m, \frac{D}{m}$ (im Falle $2 \mid m$ aber $4m, \frac{D}{4m}$) eine D-Zerfällung zweiter Art ist. Wie oben erwähnt worden war, ist unter diesen Zahlen m auch der Dirichlet-Pellsche Teiler von D zu suchen. Für alle diese Zahlen sind die Symbole in (74) definiert. Jedes solche m ist, von Quadratfaktoren abgesehen, eindeutig als Produkt aus den Zahlen $D_1', D_1'', \ldots, D_1^{(e_4)}, D$ darstellbar; und umgekehrt stellt jedes solche Produkt eine unserer Zahlen m oder 1 dar. Ordnet man der Zahl m das Produkt der entsprechenden Zeilenvektoren von M_4 zu, so gilt folgender

Satz D. *Unter den soeben definierten Zahlen m gibt es genau* $2^{e_8+1} - 1$, *für die* (74) *mit allen D-Zerfällungen* D_1, D_2 *zweiter Art gilt. Diese sind dadurch bestimmt, daß das zugeordnete Produkt der Zeilenvektoren von* M_4 *der Einheitsvektor ist. Unter diesen Zahlen ist nach Satz* 8 *der Dirichlet-Pellsche Teiler von D enthalten.*

Man vergleiche dies mit der Endbehauptung des Satzes 6. Das ergibt kurz gesagt folgendes: Für unsere beiden Fragen spielen die Zeilen bzw. Spalten derselben Matrix M_4 eine Hauptrolle. Insbesondere ist der Dirichlet-Pellsche Teiler genau dann bestimmt, wenn $e_8 = 0$ ist.

Die zweite Behauptung unseres Satzes ist eine unmittelbare Folge aus Satz 3. Weiter ist die Anzahl der Zeilen von M_4 gleich $e_4 + 1$ und der multiplikative Rang gleich $e_4 - e_8$. Damit ist auch die erste Behauptung bewiesen.

35. Jetzt wollen wir noch sehen, welche Aussagen Satz 8 über die Einheitennormen in $R(\sqrt{D})$ enthält. Offenbar sagt Satz 8 in dieser Richtung genau nur folgendes aus: 1) Gilt die Beziehung (74) für $m = d \underset{(2)}{=} D$ nicht, so gibt es in $R(\sqrt{D})$ nur Einheiten positiver Norm. 2) Gilt (74) nur für $m = d$, so gibt es in $R(\sqrt{D})$ auch Einheiten negativer Norm. Dabei kommen nur die Zahlen m in **34** in Betracht.

Nun ist nach **23** und nach Satz 3 für eine D-Zerfällung D_1, D_2 zweiter Art immer

$$\{D_1, D_2, D_1\} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4, \tag{77}$$

$$\{D_1, D_2, D\} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4. \tag{78}$$

Aus (78) folgt, daß 1) mit Satz C der Einleitung gleichbedeutend ist.

Ebenfalls nach (78), wenn wir noch Satz 6 berücksichtigen, läßt sich 2) so aussprechen [32]):

Satz B′. *Im Körper* $R(\sqrt{D})$ *gibt es Einheiten negativer Norm, wenn es wenigstens eine eigentliche D-Zerfällung zweiter Art gibt, wenn für eine beliebige unabhängige Basis* $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, e_4)$ *dieser Zerfällungen* $\left(\frac{D_2^{(i)}}{D_1^{(i)}}\right)_4 \left(\frac{D_1^{(i)}}{D_2^{(i)}}\right)_4 = 1$ *gilt und wenn es keine D-Zerfällung dritter Art gibt, d. h. wenn die ersten* e_4 *Zeilenvektoren von* M_4 *im multiplikativen Sinn unabhängig sind.*

Ich behaupte, daß der Satz B′ den Satz B der Einleitung umfaßt. Ist nämlich für alle D-Zerfällungen D_1, D_2 zweiter Art $\left(\frac{D_2}{D_1}\right)_4 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)_4 = -1$, so kann es nach Satz 6 und nach (77) wirklich keine D-Zerfällung dritter Art geben, woraus nach Satz D die Behauptung folgt.

---

[32]) Satz 8 umfaßt offenbar auch Satz A der Einleitung. Diesen habe ich in Satz B′ nicht mehr berücksichtigt.

Satz B′ ist aber auch eine wirkliche Erweiterung des Satzes B, wie ein in **36** angegebenes Beispiel zeigt. Es ist sogar leicht zu sehen, daß Satz B′ für alle Werte $e_4 \geqq 1$ anwendbar ist. (Vgl. hierzu die Bemerkung hinter Satz B der Einleitung.)

36. Für den Fall $e_4 \leqq 1$ bietet Satz B′ nichts Neues gegenüber Satz B. Den einfachsten Fall, der etwas Neues bieten kann, behandelt folgendes Beispiel.

Es sei $D = p_1 p_2 p_3$, wobei p_1, p_2, p_3 drei verschiedene positive Primzahlen sind, von denen jede quadratischer Rest der beiden anderen ist. Dann sind $p_1, p_2 p_3$ und $p_2, p_1 p_3$ D-Zerfällungen zweiter Art, und somit ist $e_4 = 2$. Indem wir die Bezeichnungen $(ik) = \left(\frac{p_i}{p_k}\right)_4$ $(i, k = 1, 2, 3; i \neq k)$, $w = \{p_1, p_2, p_3\}$ gebrauchen, sind die Bedingungen in Satz B′ offenbar genau dann befriedigt, wenn

$$(12)\,(21) = (13)\,(31) = (23)\,(32)$$

gilt und der multiplikative Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} (21)(31) & w(21) \\ w(12) & (12)(32) \end{pmatrix}$$

gleich 2 ist. Daraus entsteht leicht über Satz B hinaus folgendes Ergebnis:

Ist

$$\left(\frac{p_i}{p_k}\right)_4 \left(\frac{p_k}{p_i}\right)_4 = 1 \qquad (1 \leqq i < k \leqq 3)$$

und ist das Vorzeichen von $\{p_1, p_2, p_3\}$ *entgegengesetzt dem Vorzeichen von*

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_4 + \left(\frac{p_1}{p_3}\right)_4 + \left(\frac{p_2}{p_3}\right)_4,$$

so hat der Körper $R(\sqrt{p_1 p_2 p_3})$ *auch Einheiten negativer Norm.*

Diese Bedingungen treffen für $D = 5 \cdot 29 \cdot 181$ zu, da $\left(\frac{5}{29}\right)_4 = \left(\frac{29}{5}\right)_4 = -1$, $\{5, 29, 181\} = -1$ ist und die noch fehlenden vier Symbole $\left(\frac{\cdot\cdot\cdot}{\cdot\cdot\cdot}\right)_4$ den Wert 1 haben. In der Tat gilt $162^2 - 5 \cdot 29 \cdot 181 = -1$.

Eingegangen 5. April 1938.

Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen.

Zweite Mitteilung: Konstruktion normierter Kreissysteme.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

In der vorangehenden ersten Mitteilung gleichen Titels [1]) war der Beweis für das Nichtvorhandensein zyklisch ordnungshomogener ebener Bogen von mindestens (vierter, also mindestens) fünfter und höchstens endlicher zyklischer Ordnung zurückgeführt worden auf folgenden Satz: Wenn ein zyklisch ordnungshomogener *Konvex*bogen $\mathfrak{B}$ von mindestens fünfter und höchstens endlicher zyklischer Ordnung existiert, dann gibt es zu jedem Paare offener Teilbogen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{T} > \mathfrak{T}'$ ein *normiertes* Kreissystem, d. h. ein System von Kreisen, welches die in I., Nr. **3**, 1 angegebenen Eigenschaften I.—VI. besitzt (vgl. weiter unten Nr. **5**, 2ff.). Daß dieser Satz richtig ist, daß also für jeden derartigen zyklisch ordnungshomogenen Bogen wirklich normierte Kreissysteme existieren, soll in der vorliegenden zweiten Mitteilung gezeigt werden. Die für diesen Existenzbeweis notwendigen Hilfsmittel sind im § 1 zusammengestellt.

Die ganze Konstruktion gilt, wie ohne weiteres zu sehen ist, allgemein für den Fall, daß an Stelle der Kreise stetig differenzierbare Ovale treten, deren jedes durch drei verschiedene Punkte eindeutig festgelegt wird und zu welchem insbesondere alle Geraden gehören; es soll also das System dieser Ovale insbesondere ein System von $\mathfrak{K}_3$-Kurven sein und es sollen daher sämtliche zur Definition solcher Systeme gemachten Annahmen erfüllt sein (vgl. die in Fußnote [6]) angegebene Arbeit). Zufolge der Darlegungen der ersten Mitteilung gilt dann für die Ordnung bezüglich solcher stetig differenzierbarer $\mathfrak{K}_3$-Ovale der gleiche Existenzsatz wie bei zyklischer Ordnung (vgl. I., Nr. **2**, 1), wenn man im Texte dieses Satzes nur an Stelle von „Kreisbogen" setzt: „Teilbogen eines der $\mathfrak{K}_3$-Ovale". Die (in der vorliegenden zweiten Mitteilung dargelegte) Konstruktion normierter Kreissysteme benutzt an mehreren Stellen wesentlich die stetige Differenzierbarkeit sowie die Konvexität des Kreises (vgl. insbesondere die Behandlung des nichtdifferenzierbaren Falles, § 5). Die einschlägigen Ergebnisse hätten sich indes, wenigstens teilweise, auch ohne Zurückgreifen auf Konvexität usw. gewinnen lassen; doch sollte hierauf erst in einer folgenden Mitteilung eingegangen werden, welche von noch weitergehenden Verallgemeinerungen handelt.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen.

1, 11. Zur Abkürzung späterer Überlegungen stellen wir in den nächsten Nummern einige allgemeine Bemerkungen zusammen.

---

[1]) Dieses Journal **178** (1938), 14ff. Verweise auf die erste Mitteilung sind durch ein vorgesetztes I. gekennzeichnet (also z. B. I., Nr. **1**, 2). Verweise ohne I. (also z. B. Nr. **1**, 1) beziehen sich auf die vorliegende zweite Mitteilung.

Es sei E eine Eigenschaft. Jeder Bogen, welchem E zukommt, heiße ein *E-Bogen*. — Es sei $\mathfrak{B}$ ein vorgelegter Bogen. Ist in jedem Teilbogen von $\mathfrak{B}$ ein E-Bogen enthalten, so sagen wir: *Die E-Bogen liegen dicht auf $\mathfrak{B}$.*

1, 12. Die *Negation* der Aussage: „Die E-Bogen liegen dicht auf $\mathfrak{B}$" lautet: Es gibt (mindestens) einen Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$, welcher frei von E-Teilbogen ist, d. h. in welchem überhaupt kein E-Bogen ($\mathfrak{T}$ selbst mit eingerechnet) enthalten ist.

1, 13. Es seien $E_1, \ldots, E_q$ endlich viele vorgegebene Eigenschaften derart, daß jedem beliebig vorgegebenen Teilbogen von $\mathfrak{B}$ mindestens eine dieser Eigenschaften $E_1, \ldots, E_q$ zukommt, sodaß also *die* $(E_1 \vee \ldots \vee E_q)$*-Bogen* [2]) *dicht liegen auf* $\mathfrak{B}$. Dann *gibt es mindestens ein ϱ unter den Zahlen* $1, \ldots, q$ *und einen zugehörigen Teilbogen* $\mathfrak{T}$ *von* $\mathfrak{B}$ *derart, daß die* E_ϱ*-Bogen auf* $\mathfrak{T}$ *dicht liegen.*

In der Tat: Jedenfalls liegen die $(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_q)$-Bogen dicht auf $\mathfrak{B}$. Liegen die E_1-Bogen *nicht* dicht auf $\mathfrak{B}$, so gibt es mindestens einen Teilbogen $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{B}$, welcher frei ist von E_1-Bogen (Nr. **1**, 12). Auf einem solchen $\mathfrak{T}_1$ liegen aber die $(E_2 \vee \ldots \vee E_q)$-Bogen dicht. Fortsetzung dieser Schlüsse — angewandt auf $(E_2 \vee \ldots \vee E_q)$ und $\mathfrak{T}_1$ usw. — führt zu einem ϱ und $\mathfrak{T}$ der behaupteten Beschaffenheit.

1, 21. Unter einem Kreis wird im folgenden wieder die Kreis*linie* verstanden und unter der *offenen* Kreis*scheibe* das von der Kreislinie begrenzte beschränkte Gebiet. Es sei $\mathfrak{K}$ ein gegebener Kreis. Unter dem *zu $\mathfrak{K}$ gehörigen ε-Ring* verstehen wir den offenen Kern der Differenz derjenigen beiden mit $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreisscheiben, deren Radien sich um $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ vom Radius von $\mathfrak{K}$ unterscheiden. Unter *einer (bzw. der ε-) Nachbarschaft oder Umgebung von* $\mathfrak{K}$ verstehen wir die Gesamtheit aller Kreise (Kreislinien) $\mathfrak{K}'$, welche ganz in einem (bzw. in dem) zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Ring (bzw. ε-Ring) R liegen, während das Zentrum von $\mathfrak{K}'$ außerhalb des Ringes R liegt. Auf Grund dieser Umgebungsdefinition wird die Menge aller Kreise zu einem separablen, metrisierbaren Raume, den wir kurz als **Kreisraum f** bezeichnen können. Im Kreisraume sind die Begriffe *beliebig kleine Umgebung*, *Konvergenz* usw. erklärt. Übrigens wird der Kreisraum sogar (*in sich*) *kompakt* [3]), sobald wir die einzelnen Punkte der zyklisch abgeschlossenen [4]) Ebene dem Kreisraum als Nullkreise zugerechnet haben.

Zu den in I., Nr. **2**, 3 hinsichtlich der *Orientierung* eines Konvexbogens $\mathfrak{B}$ und eines, $\mathfrak{B}$ in mindestens drei Punkten treffenden Kreises $\mathfrak{K}$ gemachten Ausführungen sei noch folgendes bemerkt: *Die Orientierung von $\mathfrak{K}$ bei gegebener Orientierung von $\mathfrak{B}$ ist unabhängig davon, wie der Punkt Q* im Durchschnitt der von $\overline{\mathfrak{B}}$ und von $\mathfrak{K}$ begrenzten Gebiete *gewählt wird.* Ferner gilt der

Satz. *Es sei $\mathfrak{K}_0$ der Limes der Kreise $\mathfrak{K}_\varrho$, $\varrho = 1, 2, \ldots$, und $\mathfrak{B}$ ein (keine Kreisbogen enthaltender) Konvexbogen. Ferner enthalte $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}_\lambda$, $\lambda = 0, 1, \ldots$, genau die Schnittpunkte $P_\nu^{(\lambda)}$, $\nu = 1, \ldots, n$, wo $n \geqq 3$; dabei soll jeder $P_\nu^{(\lambda)}$ im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen, es soll $P_\nu^{(0)} = \lim_{\varrho \to \infty} P_\nu^{(\varrho)}$ sein, $\nu = 1, \ldots, n$, und die Reihenfolge $P_1^{(\lambda)}, \ldots, P_n^{(\lambda)}$ soll (für jedes λ) der (gemeinsamen) Orientierung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$ entsprechen. Dann ist jeder Punkt X im Innern des Bogens $\overset{\frown}{P_\nu^{(0)} P_{\nu+1}^{(0)}}$ von $\mathfrak{K}^{(0)}$ Limes von Punkten X_ϱ, wobei X_ϱ im Innern des Bogens $\overset{\frown}{P_\nu^{(\varrho)} P_{\nu+1}^{(\varrho)}}$ von $\mathfrak{K}_\varrho$ liegt.*

Beweis. Der Durchschnitt der Gebiete, welche von $\overline{\mathfrak{B}}$, von $\mathfrak{K}_0$ und von schließlich allen $\mathfrak{K}_\varrho$ begrenzt werden, ist nicht leer. Falls Q ein Punkt dieses Durchschnittes ist,

---

[2]) $(E_1 \vee E_2 \vee \ldots \vee E_q)$ bedeutet die logische Summe der $E_1, \ldots, E_q$.

[3]) Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin-Leipzig 1935, S. 123.

[4]) Vgl. I., Nr. **1**, 1.

hat die von Q ausgehende Halbgerade QX durch X mit schließlich jedem $\mathfrak{K}_\varrho$ genau einen Punkt X_ϱ gemeinsam, welcher im Innern von $\overset{\frown}{P_\nu^{(0)} P_{\nu+1}^{(0)}}$ liegt und wobei X Limes von X_ϱ ist.

1, 22. Wichtig für später ist folgender

Satz. *Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein Kreis. Die sämtlichen Schnittpunkte des $\mathfrak{K}_0$ mit dem einfachen* [5]) *Bogen $\mathfrak{B}$ seien $L_0^{(1)}, \ldots, L_0^{(k)}$. Dann gilt:*

1. *Es gibt im Kreisraum $\mathfrak{k}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{K}_0$, innerhalb welcher die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$ sämtlich erhalten und gleichmäßig beliebig scharf getrennt bleiben, d. h.: Wird zu jedem der $L_0^{(\varkappa)}$ eine Umgebung $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa)}$ von $L_0^{(\varkappa)}$ auf $\mathfrak{B}$ beliebig (klein) vorgeschrieben ($\varkappa = 1, \ldots, k$), so gibt es in $\mathfrak{k}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(\mathfrak{T}_0^{(1)}, \ldots, \mathfrak{T}_0^{(k)})$ von $\mathfrak{K}_0$ derart, daß jeder Kreis $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{U}_0$ mit jeder der $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa)}$ mindestens einen Schnittpunkt gemeinsam hat. Jeder Kreis $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{U}_0$ besitzt also insbesondere mindestens ebensoviele Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{K}_0$.*

2. *Hat $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$ außer den Schnittpunkten $L_0^{(1)}, \ldots, L_0^{(k)}$ keine inneren Punkte und keine Endpunkte von $\mathfrak{B}$ gemeinsam, so kann $\mathfrak{U}_0$ sogar so gewählt werden, daß überhaupt jeder auf $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt von $\mathfrak{B}$ zu (genau) einer der $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa)}$ gehört; dabei soll $\mathfrak{K}$ wieder zu $\mathfrak{U}_0$ gehören und die abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa)}$ sollen paarweise fremd sein.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist Spezialfall eines allgemeineren Satzes [6]) über die Erhaltung und stetige Änderung der Schnittpunkte bei stetiger Änderung der Schnittkurve, wenn letztere durch m Punkte eindeutig bestimmt ist (Hier ist $m = 3$). — Der zweite Teil ergibt sich durch eine einfache Stetigkeitsbetrachtung: Würde nämlich ein $\mathfrak{U}_0$ der gewünschten Beschaffenheit nicht existieren, so müßten Punkte von $\mathfrak{K}_0$ außerhalb der $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa)}$ auf $\mathfrak{B}$ liegen [7]).

Zusatz. Wegen des Begriffes „gleichmäßig scharf getrennt“ (wobei also „beliebig“ fehlt) vgl. Nr. **5**, 2.

1, 23. Wir führen weiter folgende Bemerkung an:

Satz. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfacher* [8]) *Bogen von endlicher zyklischer Ordnung und $\mathfrak{M}$ eine im Kreisraum $\mathfrak{k}$ in sich dichte* [9]) *Menge von Kreisen.*

Dann gibt es zu jedem beliebig vorgegebenen Kreise $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{k}$ beliebig kleine Umgebungen von $\mathfrak{K}_0$, welche Kreise $\mathfrak{K}_0'$ aus $\mathfrak{M}$ von folgender Beschaffenheit enthalten: Zu $\mathfrak{K}_0'$ läßt sich eine Umgebung $\mathfrak{U}_0' < \mathfrak{k}$ finden, so daß jeder, zur in sich dichten Kreismenge $\mathfrak{U}_0' \frown \mathfrak{M}$ gehörige Kreis $\mathfrak{K}'$ die gleiche Anzahl Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ besitzt wie $\mathfrak{K}_0'$ und nicht weniger Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{K}_0$ selbst.

Beweis. a. Gemäß dem Satz in Nr. **1**, 22 existiert zu $\mathfrak{K}_0$ eine Umgebung $\mathfrak{U}_0 < \mathfrak{k}$ derart, daß in $\mathfrak{U}_0 \frown \mathfrak{M}$ alle Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$ (soweit solche überhaupt vorhanden sind) *erhalten und gleichmäßig beliebig scharf getrennt bleiben.* Sind $L_0^{(1)}, \ldots, L_0^{(k_0)}$ diese Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$, so seien etwa $\mathfrak{T}_0^{(1)}, \ldots, \mathfrak{T}_0^{(k_0)}$ diejenigen Umgebungen dieser Schnittpunkte, zu welchen $\mathfrak{U}_0$ im Sinne der Behauptung 1 des Satzes von Nr. **1**, 22 gehört; dabei sollen die abgeschlossenen Hüllen der $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa_0)}$ paarweise fremd sein ($\varkappa_0 = 1, \ldots, k_0$, wobei $k_0 \geqq 1$).

b. Wäre nun die Behauptung unseres Satzes falsch, so müßte eine Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}}$ von $\mathfrak{K}_0$ existieren derart, daß in $\tilde{\mathfrak{U}} \frown \mathfrak{M}$ *kein* Kreis $\mathfrak{K}_0'$ der behaupteten Beschaffenheit

[5]) Die Annahme, daß der betrachtete Bogen *einfach* sei, schränkt die Allgemeinheit der Betrachtung nicht ein, zumal später lediglich Konvexbogen zur Untersuchung stehen.

[6]) Vgl. Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven usw., Monatshefte f. Math. u. Phys. **40** (1933), Nr. **1**, 4

[7]) Vgl. a. a. O [6]) Nr. **1**, 1; D.

[8]) = Fußnote [5]).

[9]) Eine Menge $\mathfrak{M}$ (in einem Umgebungsraume) soll *in sich dicht* heißen, wenn *jeder* Punkt $P < \mathfrak{M}$ *Häufungspunkt* von $\mathfrak{M}$ ist, d. h. wenn es in jeder Umgebung des Punktes P Punkte aus $\mathfrak{M}$ gibt, welche von P verschieden sind.

liegt. Wir zeigen, daß diese Annahme zu Widersprüchen führt. In der Tat: Es sei $\tilde{\mathfrak{U}}$ eine derartige Umgebung von $\mathfrak{K}_0$; wir können o. B. d. A. annehmen, daß $\tilde{\mathfrak{U}}$ in der gemäß a. bestimmten $\mathfrak{U}_0$ enthalten ist und daß mithin *jeder* Kreis aus $\tilde{\mathfrak{U}}$ mindestens ebensoviele Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat als $\mathfrak{K}_0$. Betrachtet man jetzt irgendeinen Kreis $\mathfrak{K}_1'$ aus $\tilde{\mathfrak{U}} \cap \mathfrak{M}$, so gibt es (Nr. **1**, 22) eine Umgebung $\mathfrak{U}_1'$ von $\mathfrak{K}_1'$ mit $\mathfrak{U}_1' < \tilde{\mathfrak{U}}$ derart, daß *jeder* Kreis aus $\mathfrak{U}_1' \cap \mathfrak{M}$ mindestens ebensoviele Schnittpunkte trägt als $\mathfrak{K}_1'$. Alsdann folgt aber aus der gemachten (als widerspruchsvoll nachzuweisenden) Annahme die Existenz mindestens eines Kreises $\mathfrak{K}_1 < \mathfrak{U}_1' \cap \mathfrak{M}$, welcher mindestens einen Schnittpunkt mehr mit $\mathfrak{B}$ besitzt als $\mathfrak{K}_0'$ und folglich als $\mathfrak{K}_0$. Sind dann $L_1^{(1)}, \ldots, L_1^{(k_1)}$ die sämtlichen (voneinander verschiedenen) *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}_1$ mit $\mathfrak{B}$, wobei also $k_0 + 1 \leqq k_1$, und ist die Numerierung der $L_1^{(\varkappa_1)}$ geeignet gewählt, $\varkappa_1 = 1, \ldots, k_1$, so liegt der Punkt $L_1^{(\varkappa_0)}$ in $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa_0)}$ für $\varkappa_0 = 1, \ldots, k_0$.

c. Auf $\mathfrak{K}_1$ und auf die $L_1^{(\varkappa_1)}$ können wir nun (wegen $\mathfrak{K}_1 < \tilde{\mathfrak{U}}$ im wesentlichen die gleichen Überlegungen anwenden, wie auf $\mathfrak{K}_0$ und auf die $L_0^{(\varkappa_0)}$. Wir erhalten so einen, zu $\mathfrak{K}_1$ beliebig benachbarten, Kreis $\mathfrak{K}_2$ aus $\mathfrak{M}$ mit folgender Eigenschaft: $\mathfrak{K}_2$ besitzt mindestens $(k_1 + 1)$ verschiedene Schnittpunkte mit $\mathfrak{B}$, etwa $L_2^{(1)}, \ldots, L_2^{(k_2)}$, wobei $k_1 + 1 \leqq k_2$. Ferner liegt $L_2^{(\varkappa_1)}$ für $\varkappa_1 = 1, \ldots, k_1$ in $\mathfrak{T}_1^{(\varkappa_1)}$. Dabei bedeutet $\mathfrak{T}_1^{(\varkappa_1)}$ eine Umgebung von $L_1^{(\varkappa_1)}$, $\varkappa_1 = 1, \ldots, k_1$, derart, daß die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_1^{(\varkappa_1)}$ aller $\mathfrak{T}_1^{(\varkappa_1)}$ paarweise fremd sind, und daß $\mathfrak{T}_1^{(\varkappa_0)}$ in $\mathfrak{T}_0^{(\varkappa_0)}$ enthalten ist für $\varkappa_0 = 1, \ldots, k_0$.

d. Die Fortsetzung des in a.—c. angegebenen Prozesses führt zu einer Folge von in $\mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{M}$ enthaltenen Kreisen $\mathfrak{K}_\nu$ und zu einer Folge abgeschlossener Teilbogen $\overline{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varkappa_\nu)}$ von $\mathfrak{B}$, wobei $\varkappa_\nu = 1, \ldots, k_\nu$; $k_\nu + 1 \leqq k_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, mit folgender Eigenschaft: Die abgeschlossenen Hüllen $\overline{\mathfrak{T}}_\nu^{(1)}, \ldots, \overline{\mathfrak{T}}_\nu^{(k_\nu)}$ sind (für festes ν) paarweise fremd. Ferner ist $\overline{\mathfrak{T}}_{\nu+1}^{(\varkappa_\nu)} < \overline{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varkappa_\nu)}$, $\varkappa_\nu = 1, \ldots, k_\nu$. Schließlich liegt in jedem der $\mathfrak{T}_\nu^{(1)}, \ldots, \mathfrak{T}_\nu^{(k_\nu)}$ mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_\nu$ mit $\mathfrak{B}$. Wegen der Kompaktheit des Kreisraumes (vgl. Nr. **1**, 21) läßt sich nun aus der Folge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ eine Teilfolge herausgreifen, welche gleichmäßig gegen einen Kreis $\mathfrak{K}^*$ konvergiert. Wie in I., Nr. **5**, 4 ergibt sich dann, daß $\mathfrak{K}^*$ unendlich viele verschiedene Punkte mit $\mathfrak{B}$ gemeinsam hätte. Dies widerspricht der Voraussetzung, derzufolge $\mathfrak{B}$ von endlicher zyklischer Ordnung ist. Damit ist die Behauptung unseres Satzes bewiesen.

1, 24. Gelegentlich nützlich ist auch die folgende Bemerkung: *Es seien die Voraussetzungen des Satzes von* Nr. **1**, 23 *erfüllt. Überdies gebe es zu jedem Kreise* $\mathfrak{K}$ *aus* $\mathfrak{M}$, *welcher einen Stützpunkt S trägt, beliebig benachbarte Kreise aus* $\mathfrak{M}$, *auf welchen S in (mindestens) zwei (zu S beliebig benachbarte Schnitt-)Punkte aufgespalten ist, d. h. Kreise, welche mit* $\mathfrak{B}$ *mindestens zwei, in beliebiger Nähe von S gelegene Schnittpunkte gemeinsam haben. Dann gibt es in beliebiger Umgebung eines beliebig vorgegebenen Kreises aus* $\mathfrak{M}$ *in sich dichte Teilmengen* $\mathfrak{M}'$ *von* $\mathfrak{M}$, *so daß keiner der Kreise aus* $\mathfrak{M}'$ *Stützpunkte mit* $\mathfrak{B}$ *besitzt. Überdies kann* $\mathfrak{M}'$ *so gewählt werden, daß alle Kreise aus* $\mathfrak{M}'$ *die gleiche Zahl (übrigens gleichmäßig beliebig scharf getrennter) Schnittpunkte mit* $\mathfrak{B}$ *besitzen.* $\mathfrak{M}'$ *kann als (Relativ-)Umgebung eines Kreises aus* $\mathfrak{M}$ *auf* $\mathfrak{M}$ *gewählt werden.*

Beweis. Die Existenz von $\mathfrak{M}'$ ergibt sich durch bekannte Überlegungen [10]). Das übrige folgt aus dem Satz von Nr. **1**, 23.

1, 25. Durch ähnliche Überlegungen wie beim Beweise des Satzes von Nr. **1**, 22 erhält man den folgenden

---

[10]) Vgl. Haupt, Über die Struktur der reellen Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 55. bzw. a. a. O. [6]), Nr. **1**, 6a.

Satz. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein einfacher Bogen von endlicher zyklischer Ordnung; die gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{B}$ mit allen in Frage kommenden Kreisen $\mathfrak{K}$ seien simultan natürlich geordnet auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}$. Ferner habe der Kreis $\mathfrak{K}_0$ mit dem Bogen $\mathfrak{B}$ keine Endpunkte von $\mathfrak{B}$ gemeinsam, aber mindestens drei andere Punkte, darunter mindestens einen Schnittpunkt.*

Dann liegen alle zu $\mathfrak{K}_0$ hinreichend benachbarten Kreise gleichartig bezüglich $\mathfrak{B}$. M. a. W.: Es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{K}_0$, so daß alle Kreise aus $\mathfrak{U}_0$, also $\mathfrak{K}_0$ eingeschlossen, gleichartig liegen (vgl. I., Nr. 2, 6) *bezüglich $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Da $\mathfrak{B}$ mit jedem Kreise nur endlich viele Punkte gemeinsam hat und da $\mathfrak{K}_0$ keine Endpunkte von $\mathfrak{B}$ enthält, kann sich bei stetigem Übergang von $\mathfrak{K}_0$ zu einem benachbarten Kreise die Anzahl der Schnittpunkte nur um eine *gerade* Anzahl ändern.

1, 31. Unter einem **Konvexbogen** verstehen wir, wie in I., Nr. 2, 3, einen ebenen Bogen der linearen Ordnung zwei, von welchem wir ausnahmslos annehmen, daß er **weder Strecken noch Kreisbogen** als Teile **enthält**. In Rücksicht auf später muß an folgendes erinnert werden: In jedem Punkte Q eines Konvexbogens existieren (eindeutig) die beiden Halbtangenten [11]).

Die obere (rechtsseitige) Halbtangente eines orientierten Konvexbogens $\mathfrak{B}$ ist einseitig, und zwar rechtsseitig stetig, d. h.: Ist $\mathfrak{U}^*$ eine obere Umgebung des Punktes P_0 auf $\mathfrak{B}$, ist ferner h_0^* die obere Halbtangente im *(Berührungs-)*Punkte P_0, also die Halbtangente an $\mathfrak{U}^*$ in P_0, ist schließlich $\{P_\nu\}$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{U}^*$, welche gegen P_0 konvergiert, und sind h_ν^* die oberen Halbtangenten an $\mathfrak{B}$ in P_ν, so gilt:

$$h_0^* = \lim_{\nu \to \infty} h_\nu^*.$$

Entsprechend ist die *untere* Halbtangente *linksseitig* stetig.

1, 32. Übrigens sind die rechts- und die linksseitige Halbtangente an einen Konvexbogen niemals identisch; hingegen sind sie kollinear bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmepunkte; m. a. W.: *Ein Konvexbogen ist gewöhnlich differenzierbar bis auf eine höchstens abzählbare aus Ecken bestehende Ausnahmemenge $\mathfrak{A}$. In $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ ist die Tangente an $\mathfrak{B}$ stetig.* Letzteres folgt aus der einseitigen Stetigkeit der Halbtangenten. Jeder Konvexbogen $\mathfrak{B}$ enthält mithin entweder einen **eckenfreien,** also stetig differenzierbaren Teilbogen oder $\mathfrak{B}$ ist **eckendicht,** d. h. auf $\mathfrak{B}$ liegen die Ecken dicht. Da es sich für uns darum handeln wird, für mindestens einen Teilbogen des (als existierend angenommenen) ordnungshomogenen Konvexbogens ein normiertes Kreissystem zu konstruieren (vgl. Nr. 2, 1), *so genügt es, den Konvexbogen selbst entweder als eckenfrei oder als eckendicht anzunehmen.*

1, 33. Eine gewisse Erweiterung des Satzes von der einseitigen Stetigkeit der Halbtangenten (Nr. 1, 31) ist diese:

Konvergieren die auf dem Konvexbogen $\mathfrak{B}$ gelegenen Punkte P_ν von oben her gegen den Punkt P_0 von $\mathfrak{B}$, ist ferner s_ν irgendeine Stützgerade an $\mathfrak{B}$ in P_ν, so konvergieren die s_ν mit $\nu \to \infty$ gegen die Trägergerade der oberen Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in P_0.

Zu den Stützgeraden gehören natürlich insbesondere die Trägergeraden sowohl der oberen als der unteren Halbtangenten.

1, 4. Wie in I., Nr. 2, 3, gezeigt wurde, lassen sich diejenigen Punkte, welche irgendein Kreis $\mathfrak{K}$ mit einem Konvexbogen $\mathfrak{B}$ gemeinsam hat, simultan natürlich anordnen auf $\mathfrak{K}$ *und* auf $\mathfrak{B}$. Daher ist, wie ebenda (Fußnote [13])) bemerkt, die Gültigkeit des *speziellen Monotoniesatzes* gesichert. Dieser Satz nebst einigen noch anzugebenden etwas abgeänder-

[11]) Wegen dieser und der folgenden Eigenschaften eines Konvexbogens vgl. z. B. Haupt, Differential- und Integralrechnung. Unter Mitarbeit von G. Aumann, 2. Bd., Berlin-Leipzig, 1938, S. 60/61.

ten Monotoniesätzen, wird ein wichtiges Hilfsmittel bei der beabsichtigten Konstruktion normierter Kreissysteme sein. Er lautet[12]):

Spezieller Monotoniesatz. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein (keine Strecken oder Kreisbogen enthaltender) Konvexbogen von (mindestens vierter und höchstens) endlicher zyklischer Ordnung.*

Werden zwei verschiedene Schnittpunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Konvexbogen $\mathfrak{B}$ festgehalten und wird $\mathfrak{K}$ (hinreichend wenig) abgeändert, so „bewegen sich" je zwei andere Schnittpunkte aus $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{K}$ (falls solche vorhanden sind) zueinander entgegengesetzt, sobald sie auf $\mathfrak{B}$ benachbart, d. h. auf $\mathfrak{B}$ höchstens durch festgehaltene Schnittpunkte und durch (nicht festgehaltene) Stützpunkte von einander getrennt werden. Und zwar gilt das solange, als keiner der festgehaltenen beiden Schnittpunkte aufhört, Schnittpunkt zu sein. — Sind die beiden beweglichen Schnittpunkte S_1, S_2 durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl (beweglicher) Schnittpunkte von einander auf $\mathfrak{B}$ getrennt, so bewegen sich S_1, S_2 entgegengesetzt bzw. gleichsinnig auf $\mathfrak{B}$.

Der Ausdruck „*bewegen sich entgegengesetzt*" ist dabei folgendermaßen zu verstehen: Es seien A und B die beiden festgehaltenen (im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen) Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{B}$, ferner seien X und Y zwei andere *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{B}$, zwischen denen kein weiterer beweglicher Schnittpunkt liegt. Um X und Y seien auf $\mathfrak{B}$ hinreichend kleine (fremde) Umgebungen $\mathfrak{U}_x$ bzw. $\mathfrak{U}_y$ abgegrenzt, so daß $\mathfrak{U}_x \frown \mathfrak{K} = X$, $\mathfrak{U}_y \frown \mathfrak{K} = Y$. Jeder zu $\mathfrak{K}$ hinreichend benachbarte Kreis $\mathfrak{K}'$ durch A und B besitzt dann in $\mathfrak{U}_x$ bzw. $\mathfrak{U}_y$ gelegene *Schnitt*punkte X' bzw. Y' mit $\mathfrak{B}$. Und zwar gilt: Liegt *kein* X' zwischen X und Y, so auch kein Y'. Liegt mindestens ein X' zwischen X und Y, so liegen *alle* X' und *alle* Y' zwischen X und Y. — Entsprechend erklärt man die gleichsinnige Bewegung. Im übrigen sei hier auf die ergänzenden Erklärungen in Nr. **1**, 53., c), Zusatz, verwiesen.

1, 41. Der eine der oben (Nr. **1**, 4) angekündigten abgeänderten Monotoniesätze bezieht sich auf den Fall, daß die beiden festzuhaltenden Punkte des Kreises sozusagen zusammenfallen: Es wird dabei ein Punkt des Kreises und in ihm die Kreistangente festgehalten. Die diesbezügliche Behauptung lautet:

Tangentenmonotoniesatz. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein Konvexbogen von (mindestens vierter und höchstens) endlicher zyklischer Ordnung. Ferner sei $\mathfrak{K}_0$ ein Kreis, welcher durch den Punkt P_0 von $\mathfrak{B}$ geht und dort die Gerade $\mathfrak{t}_0$ als Tangente besitzt. Dann gilt:*

Ändert man $\mathfrak{K}_0$ derart ab, daß dabei P_0 und die Kreistangente $\mathfrak{t}_0$ festgehalten werden, so bleiben keine weiteren Punkte von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{B}_0$ fest und es bewegen sich die etwa vorhandenen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$, soweit sie von P_0 verschieden sind, in folgender Weise:

α) Zwei Schnittpunkte, welche auf $\mathfrak{B}$ beide unterhalb oder beide oberhalb von P_0 liegen, bewegen sich entsprechend dem speziellen Monotoniesatz (d. h. sie bewegen sich auf $\mathfrak{B}$ im gleichen oder entgegengesetzten Sinne, je nachdem sie durch eine ungerade oder durch eine gerade Anzahl (beweglicher) Schnittpunkte voneinander getrennt sind).

β) Zwei Schnittpunkte, von denen der eine auf $\mathfrak{B}$ oberhalb von P_0, der andere unterhalb von P_0 liegt, bewegen sich:

β_1) entsprechend dem speziellen Monotoniesatze, solange P_0 Stützpunkt von $\mathfrak{B}$ mit den betrachteten Kreisen ist;

β_2) entgegen dem speziellen Monotoniesatz, sobald P_0 Schnittpunkt von $\mathfrak{B}$ mit den betrachteten Kreisen ist, (d. h.: die beiden Schnittpunkte in β) bewegen sich auf $\mathfrak{B}$ im gleichen oder entgegengesetzten Sinne, je nachdem sie durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl [beweglicher] Schnittpunkte von einander getrennt sind).

Anmerkung. Über das etwaige Auftreten *neuer* Schnittpunkte im Laufe der betrachteten monotonen Änderung vgl. Nr. **1**, 51 ff.

---

[12]) Vgl. a. a. O. [6]), Nr. **3**, 2.

Beweis. Zunächst sind die gemeinsamen Punkte unseres Kreises $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$ (gleichgültig ob Schnitt- oder Stützpunkte) simultannatürlich geordnet auf $\mathfrak{K}$ *und* auf $\mathfrak{B}$. Ferner haben alle Kreise durch P_0, welche dort t_0 als Tangente besitzen, mit $\mathfrak{K}_0$ außer P_0 keinen weiteren Punkt gemeinsam. Im Falle der Behauptung α) bewegen sich daher zwei Schnittpunkte von $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{K}_0$ im entgegengesetzten Sinne, wenn sie auf $\mathfrak{B}$ durch z. B. keine anderen Schnittpunkte getrennt werden. Allgemein verläuft im Falle α) die Bewegung entsprechend dem speziellen Monotoniesatze.

Die Behauptung β) ergibt sich aus der Tatsache, daß P_0 auf $\mathfrak{K}_0$ ein *Stütz*punkt ist für jeden Kreis $\mathfrak{K}$, welcher in P_0 mit $\mathfrak{K}_0$ die Tangente gemeinsam hat und daß daher $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{K}_0$ *nur* P_0 enthält. Im übrigen benutzt der Beweis die gleichen Überlegungen wie der des gewöhnlichen allgemeinen bzw. speziellen Monotoniesatzes[13]).

1, 42. Ein etwas anderer, ebenfalls benötigter Monotoniesatz ist der

Stützmonotoniesatz. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein Konvexbogen (von mindestens vierter zyklischer Ordnung). Ferner sei $\mathfrak{K}_0$ ein Kreis, welcher mit $\mathfrak{B}$ außer Schnittpunkten auch noch mindestens einen Stützpunkt Q_0 gemeinsam hat. Dabei soll Q_0 eine Ecke von $\mathfrak{B}$ sein und die Kreistangente t_0 in Q_0 soll keine der Halbtangenten in Q_0 an $\mathfrak{B}$ enthalten.*

Hält man dann Q_0 und einen (von Q_0 verschiedenen) Schnittpunkt F_0 von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$ fest, so gilt für alle genügend kleinen Abänderungen von $\mathfrak{K}_0$ wieder:

α) Zwei Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{B}$, welche beide oberhalb oder beide unterhalb von Q_0 auf $\mathfrak{B}$ liegen, bewegen sich entsprechend dem speziellen Monotoniesatz;

β) hingegen bewegen sich zwei Schnittpunkte, von denen der eine oberhalb und der andere unterhalb Q_0 auf $\mathfrak{B}$ gelegen ist, entgegen dem speziellen Monotoniesatze.

Beweis. Mit den durch hinreichend kleine Abänderung aus $\mathfrak{K}_0$ entstehenden Kreisen $\mathfrak{K}$ hat $\mathfrak{K}_0$ nur die Punkte Q_0 und F_0 gemeinsam; dabei sind Q_0 und F_0 beides *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{K}$. Daraus folgt bereits die Behauptung α). Um die Behauptung β) zu erhalten, beachte man: Zufolge der Voraussetzung ist t_0 eine, von den Trägergeraden der Halbtangenten an $\mathfrak{B}$ in Q_0 verschiedene, Stützgerade von $\mathfrak{B}$ in Q_0. Daher ist Q_0 auch für alle, zu $\mathfrak{K}_0$ hinreichend benachbarten Kreise $\mathfrak{K}$ (durch F_0 und Q_0) Stützpunkt auf $\mathfrak{B}$. Da ferner Q_0 *Schnitt*punkt von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}_0$ ist, folgt die Behauptung nach bekannten Überlegungen[13]).

1, 5. Bei den späteren Anwendungen der Monotoniesätze aus Nr. **1**, 4 ist es notwendig, gewisse Möglichkeiten genau zu überblicken, welche sich hinsichtlich der gemeinsamen Punkte eines Bogens mit einem Kreise im Verlaufe bestimmter, sogleich anzugebender Änderungen des Kreises darbieten. Diese Möglichkeiten sollen daher jetzt näher erörtert werden[14]).

1, 51. Zunächst definieren wir die Begriffe *Gewinn* und *Verlust von gemeinsamen Punkten* (des Bogens mit dem Kreise); und zwar allgemein für beliebige stetige Änderungen des Kreises. Wir wollen dabei stets annehmen, daß die jeweils betrachtete Änderung — genauer gesagt: jede Koordinate des sich ändernden Kreises — als (stetige) Funktion einer reellen Veränderlichen t, des sogenannten Änderungs- (oder Prozeß-) *Parameters* t, darstellbar sei (wobei etwa $0 \leqq t \leqq 1$), so daß also jedem t eine bestimmte Lage $\mathfrak{K}(t)$ des sich ändernden Kreises entspricht. Die Änderung soll im übrigen im Sinne wachsender t verlaufen, womit eine *Richtung des Änderungsprozesses* festgelegt ist; abnehmendem t entspricht dann der *seiner Richtung nach entgegengesetzte* Prozeß. Diese Annahmen können

[13]) Vgl. a. a. O. [12]).

[14]) Viele der in Nr. **1**, 51 ff. angestellten Betrachtungen benutzen im Grunde lediglich die Gültigkeit des (speziellen) Monotoniesatzes und liefern daher Sätze von sehr allgemeiner Natur. Vgl. a. a. O. [6]), Nr. 4, 73, sowie M. Linsman, Introduction à une théorie abstraite de la notion de l'ordre des figures réelles, Mémoires publ. par l'Académie royale de Belgique, Classe des sciences, **17**, 1938. Vgl. ferner vorliegende Arbeit Nr. **1**, 53., c), Zusatz.

bei allen späteren Anwendungen als erfüllt gelten. Es sei nun P_0 ein (innerer oder End-)Punkt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{K}(t_0)$ ein Kreis durch P_0; **immer wird $\mathfrak{B}$ als von endlicher zyklischer Ordnung vorausgesetzt.** Wir sprechen dann von einem *Gewinn von Punkten aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ im Punkte P_0 für $t = t_0$ bei wachsendem t und $0 < t_0 < 1$*, wenn folgender Sachverhalt vorliegt:

Zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}$ von P_0 auf $\mathfrak{B}$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(\mathfrak{U})$ von t_0 auf $[0, 1]$ derart, daß $\mathfrak{U}$ für *jedes* t aus $\mathfrak{V}$ mit $t < t_0$ weniger Punkte aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ enthält, als für *geeignete*, beliebig nahe bei t_0 gelegene t (aus $\mathfrak{V}$) mit $t_0 < t$. Vertauscht man in dieser Definition „mehr" mit „weniger", so erhält man den Begriff des *Verlustes von* Punkten aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ in P_0 für $t = t_0$ bei wachsendem t und $0 < t_0 < 1$. Entsprechend werden Gewinn und Verlust bei *abnehmendem* t erklärt. Sind in $\mathfrak{U}$ im Falle eines Gewinnes schon für $t < t_0$ Punkte aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ vorhanden, so kann auch von „deren *Aufspalten* im Punkte P_0 in eine größere Anzahl von Punkten" gesprochen werden. Entsprechend erklärt man den Begriff Gewinn bzw. Verlust *in P_0 für $t > t_0$ gegenüber $t = t_0$*, also für den Fall, daß die Betrachtung sich nur auf den Prozeß für $t_0 \leqq t$ erstreckt.

Mit dem Begriff des Gewinnes in P_0 für $t = t_0$ bei z. B. wachsendem t ist es übrigens vereinbar, daß P_0 Häufungspunkt von Punkten $P_\nu < \mathfrak{B}$ ist, welchen eine monoton wachsende Folge von Parameterwerten t_ν mit dem Limes t_0 derart entspricht, daß in P_ν für $t = t_\nu$ bei wachsendem t ein Gewinn eintritt.

Ist P_0 *innerer* Punkt auf $\mathfrak{B}$ und findet bei wachsendem t für $t = t_0$ in P_0 etwa ein Gewinn statt, so kann in einer passend gewählten Umgebung von P_0 für hinreichend nahe oberhalb von t_0 gelegene t stets nur eine *gerade* Anzahl *Schnitt*punkte mehr vorhanden sein als für $t < t_0$. Ist hingegen P_0 ein *End*punkt von $\mathfrak{B}$, so kann die Anzahl der gewonnenen Schnittpunkte sehr wohl auch ungerade sein. Die soeben für den Fall eines auf $\mathfrak{B}$ *inneren* Punktes gemachte Feststellung drücken wir kurz so aus:

Es kann in einem Punkte P_0 immer nur eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gewonnen oder verloren werden, sofern P_0 innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

Ferner gilt:

Erfolgt ein Gewinn in einem inneren Punkte P_0 von $\mathfrak{B}$ und enthält eine feste Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$ zunächst, d. h. für $t < t_0$, keine Punkte aus $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$, so ist P_0 für $t = t_0$ ein Stützpunkt. Entsprechend für Verluste, wenn für $t_0 < t$ eine feste Umgebung von P_0 keine Punkte von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ enthält.

In der Tat: Wäre P_0 für $t = t_0$ Schnittpunkt von $\mathfrak{K}(t_0)$ auf $\mathfrak{B}$, so würde *jeder* zu $\mathfrak{K}(t_0)$ hinreichend benachbarte Kreis in beliebiger Nähe von P_0 auf $\mathfrak{B}$ (mindestens) einen Schnittpunkt besitzen; dies würde also insbesondere gelten für alle $\mathfrak{K}(t)$ mit $t < t_0$ (sowie mit $t_0 < t$), wo t beliebig nahe bei t_0 liegt, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

1, 52. Wir haben jetzt das mögliche Auftreten von Gewinnen und Verlusten im Laufe *gewisser* Änderungen (Prozesse) zu untersuchen. Bei allen betrachteten Prozessen ist $\mathfrak{B}$ als von *endlicher zyklischer Ordnung* vorausgesetzt. Außerdem sollen $\mathfrak{B}$ und die zu betrachtenden Kreise $\mathfrak{K}$ so orientiert sein, daß die *Punkte von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ simultan-natürlich geordnet* erscheinen; wegen der angenommenen Konvexität ist dies stets möglich (vgl. I., Nr. **2**, 3).

Zunächst handelt es sich um *monotone Prozesse*; wir verstehen darunter solche, bei welchen entweder zwei verschiedene Punkte des abzuändernden Kreises festgehalten werden oder ein Punkt mit seiner Tangente. Im ersteren Falle gilt der spezielle Monotoniesatz, sobald die beiden festgehaltenen Punkte Schnittpunkte des Kreises mit $\mathfrak{B}$ sind; hingegen gilt der Stützmonotoniesatz (Nr. **1**, 42), solange *einer* der beiden festen Punkte Stützpunkt ist. Im zweiten Falle gilt der Tangentenmonotoniesatz (Nr. **1**, 41).

Anmerkung. Beim speziellen Monotoniesatz waren die festgehaltenen Punkte sämtlich als *Schnitt*punkte vorausgesetzt: Es kann nun im Laufe eines monotonen Prozesses *ein* beweglicher Punkt mit *einem* festgehaltenen zusammenrücken und es kann für einen bestimmten Wert von t der festgehaltene Punkt T alsdann zum Stützpunkt werden. Es fällt dann in T sicher eine Halbtangente an $\mathfrak{B}$ in die Kreistangente in T. Liegt in T eine *Ecke* des Konvexbogens $\mathfrak{B}$, so erhalten wir bei Fortführung des monotonen Prozesses unter Festhalten von T — zunächst wenigstens — den Fall des Stützmonotoniesatzes (Nr. **1**, 42).

1, 53. *Die folgenden Betrachtungen beziehen sich immer auf einen solchen abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$, in dessen Innerem bei dem jeweils in Betracht kommenden monotonen Prozesse kein festgehaltener Schnittpunkt mit gleichzeitig festgehaltener Kreistangente und kein festgehaltener Stützpunkt liegt, sodaß die Bewegung der Punkte von $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ dem speziellen Monotoniesatze entsprechend sich abspielt. Ferner wird angenommen, daß sich der Parameter mit dem Fortschreiten des Prozesses monoton ändert. $\mathfrak{C}$ soll natürlich von endlicher zyklischer Ordnung sein.*

a) *Es sei S_0 ein* (nicht festgehaltener) *Stützpunkt von $\mathfrak{K}(t_0)$ auf $\mathfrak{C}$. Ferner sei R bzw. Q der dem S_0 oberhalb bzw. unterhalb auf $\mathfrak{C}$ am nächsten gelegene bewegliche* d. h. nicht festgehaltene, *Schnittpunkt oder*, falls ein solcher Schnittpunkt nicht existiert, *der ober- bzw. unterhalb von S_0 gelegene Endpunkt* von $\mathfrak{C}$, der möglicherweise gar nicht in $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ enthalten ist; dieser Endpunkt darf aber auch zu den festgehaltenen Punkten gehören. Es soll höchstens *einer* der Punkte Q, R ein solcher Endpunkt sein. Zwischen den beiden benachbarten (vgl. Nr. **1**, 4) Punkten R und Q dürfen *mehrere* Stützpunkte liegen.

Es seien zunächst *Q und R* beide in $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ enthalten. Sind *Q und R innere* Punkte von $\mathfrak{C}$, so *bewegen sich Q, R* (entsprechend dem speziellen Monotoniesatz) im entgegengesetzten Sinne, d. h. entweder beide *aufeinander zu*, und somit *auf S_0 zu*, oder beide *voneinander weg*, und somit auch *von S_0 weg*. Diese Ausdrucksweise: „aufeinander zu-" bzw. „voneinander wegbewegen" wird beibehalten auch für den Fall, daß z. B. *Q ein Endpunkt von $\mathfrak{C}$* ist und daß R sich auf den Endpunkt Q zu- oder von ihm wegbewegt; letzterenfalls findet dann in Q für $t > t_0$ gegenüber t_0 ein Verlust statt, es sei denn, daß Q ein festgehaltener Punkt ist (vgl. dazu auch weiter unten, Buchstabe **b**).

Sind *Q und R nicht beide in $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ enthalten*, so sei etwa Q der nicht in $\mathfrak{K}$ enthaltene Endpunkt von $\mathfrak{C}$. Dann ist R in $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ enthalten und es bleibt Q bei jeder hinreichend kleinen Bewegung von R fest. Trotzdem sprechen wir auch hier in leicht verständlichem Sinne von „Bewegung aufeinander zu" oder „voneinander weg".

Bewegen sich R und Q voneinander und damit von S_0 weg, so geht S_0 verloren; und zwar liegen dann in der Umgebung von S_0 auf $\mathfrak{C}$ überhaupt keine Punkte von $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$, sobald t oberhalb t_0 liegt. Ebenso geht jeder mit S_0 gleichartig, sowie zwischen R und Q gelegene Stützpunkt verloren.

Bewegen sich dagegen R und Q aufeinander und damit auf S_0 zu, so spaltet sich S_0 in mindestens zwei Schnittpunkte auf; *und dabei liegt mindestens ein Schnittpunkt oberhalb und mindestens einer unterhalb von S_0 auf $\mathfrak{C}$.* Gleiches gilt für jeden mit S_0 gleichartig, sowie zwischen R und Q gelegenen Stützpunkt.

Bei unseren Voraussetzungen bewegt sich also ein Stützpunkt jedenfalls nie als Stützpunkt weiter.

Beweis. Folgt aus der Betrachtung der gegenseitigen Lage der $\mathfrak{K}(t)$ und ihrer Lage gegenüber $\mathfrak{C}$.

b) Es sei *S ein nicht festgehaltener Schnittpunkt aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$, welcher sich auf $\mathfrak{C}$ etwa aufwärts bewegt. Es spalte sich S für $t = t_0$ im Punkte P_0 auf. Dann liegen jedenfalls*

alle aus S in P_0 gewonnenen Punkte oberhalb P_0. Das soll heißen: Ist $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{B}$, deren abgeschlossene Hülle mit $\mathfrak{R}$ für $t = t_0$ nur den P_0 gemeinsam hat, so liegen für alle zu t_0 hinreichend benachbarten t mit $t_0 < t$ die Punkte von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{R}$ sämtlich oberhalb P_0. Übrigens kann der unterste Punkt von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{R}$ als Schnittpunkt angenommen werden, wenn man (nötigenfalls) zu einem, dem betrachteten t beliebig benachbarten, geeigneten t' übergeht.

Anmerkung. Über die Art, in welcher ein solches Aufspalten im einzelnen vor sich gehen kann, vergleiche auch die Anmerkung zu Nr. **1**, 54.

Beweis. Folgt wieder aus der gegenseitigen Lage der Kreise. Daß der, etwa mit T bezeichnete, unterste (oberhalb P_0 gelegene) Punkt von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{R}$ als Schnittpunkt angenommen werden kann, sieht man so: Ist T ein Stützpunkt, so spaltet sich T zufolge **a)** für passende, zu t beliebig benachbarte t' in mindestens zwei (zu T beliebig benachbarte) Schnittpunkte auf. Da die Menge der Kreise, welche zu den t einer Umgebung von t_0 gehören, in sich dicht ist, so kann der Satz in Nr. **1**, 24 angewandt werden. Daraus folgt das Behauptete.

c) *Es seien R und Q zwei bewegliche* (d. h. nicht festgehaltene) *Schnittpunkte auf $\mathfrak{C}$, welche durch keinen anderen beweglichen Punkt von $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{R}$ von einander auf $\mathfrak{C}$ getrennt werden.* R und Q bewegen sich also auf $\mathfrak{C}$ in entgegengesetzter Richtung. Der von R und Q begrenzte offene Teilbogen von $\mathfrak{C}$ sei mit $\overset{\frown}{RQ}$ bezeichnet. *Bewegen sich R und Q voneinander weg (auseinander), so wächst der Bogen $\overset{\frown}{RQ}$,* d. h. die $\overset{\frown}{RQ}$ bilden bei wachsendem t eine aufsteigende Bogenschar. *Abgesehen von Anfangsverlusten,* d. h. von dem Verlust von Stützpunkten, welche zu Beginn des Prozesses in $\overset{\frown}{RQ}$ gelegen waren, tritt dann innerhalb $\overset{\frown}{RQ}$ *kein Gewinn oder Verlust* ein. Wir bezeichnen daher einen derartigen, wachsenden Teilbogen $\overset{\frown}{RQ}$ auch als **ständig frei bezüglich** (der Richtung) **des monotonen Prozesses** (nämlich als während des Prozesses beständig frei von *beweglichen* Punkten aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{R}$). Bewegt sich ein weiterer Schnittpunkt z. B. dem Punkte Q entgegen und trifft er schließlich mit ihm in P zusammen, so gelte für den Augenblick des Zusammentreffens P als gemeinsamer Begrenzungspunkt zweier ständig freier Teilbogen; P ist dann ein Stützpunkt.

Insbesondere bleibt ein, in einem freien Teilbogen gelegener festgehaltener Schnittpunkt stets Schnittpunkt.

Abgesehen von Anfangsverlusten können daher Gewinne und Verluste bei dem hier vorausgesetzten monotonen Prozesse nur auf solchen, bei Beginn des Prozesses von beweglichen Punkten $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{R}$ freien, Teilbogen $\overset{\frown}{RQ}$ eintreten, welche monoton abnehmen, d. h. deren Begrenzungspunkte R, Q sich aufeinander zubewegen. Solche Bogen werden wir als **nicht ständig frei bezüglich** (der Richtung) **des monotonen Prozesses** bezeichnen.

Die soeben erklärten Begriffe und die zugehörigen Feststellungen gelten entsprechend auch z. B. für den *Fall, daß R ein beweglicher Schnittpunkt, aber Q ein Endpunkt von $\mathfrak{C}$ ist* (welcher nicht notwendig zu $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{R}$ gehört, vgl. **a)**). Bewegt sich dann R von Q weg, so ist der wachsende Bogen $\overset{\frown}{RQ}$ wieder ständig frei usw.

Beweis. Daß ein, in einem wachsenden $\overset{\frown}{RQ}$ gelegener (fester) Schnittpunkt sich nicht aufspaltet und daß er stets Schnittpunkt bleibt, ergibt sich wieder durch Betrachtung der einschlägigen Kreise (unter Berücksichtigung der simultan-natürlichen Anordnung der Punkte von $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{R}$); zufolge b) bleibt ferner für alle, zu t_0 hinreichend benachbarten t mit $t_0 < t$ je eine, in $\overset{\frown}{RQ}$ enthaltene einseitige Umgebung von R sowie von Q frei von Punkten aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{R}$. Auch in den übrigen Punkten von $\overset{\frown}{RQ}$ können (wie ebenfalls

die in Betracht kommenden Kreise $\mathfrak{K}$ erkennen lassen) keine Gewinne und folglich auch keine Verluste auftreten. Entsprechend ergeben sich die übrigen Behauptungen.

Zusatz: Es ist noch eine arithmetisierbare Fassung der bisher in mehr anschaulicher Weise eingeführten Begriffe und formulierten Ergebnisse nachzutragen, soweit sie sich auf monotone Prozesse beziehen; besteht doch eine Schwierigkeit für unsere bisherige Darstellung z. B. schon darin, daß bei etwaigem Aufspalten bzw. bei Verlusten die Verfolgung eines (sich bewegenden) Punktes, sozusagen als Einzelindividuum, durch den ganzen Verlauf des monotonen Prozesses hindurch unter Umständen unmöglich ist. Eine Fassung der gewünschten Art ist etwa die nachstehend skizzierte: Die endlich vielen Punkte $P(t), Q(t), \ldots$, welche der Kreis $K(t)$ mit B gemeinsam hat, bestimmen eindeutig eine Menge $i(t)$ von endlich vielen, offenen, keine $P(t)$ usw. enthaltenden, aber durch solche begrenzten Teilbogen $J(t)$ von B. Enthält $i(t)$ ein $J(t)$ derart, daß $J(t') < J(t'')$ für $t' < t''$, so bezeichne man diese, durch Angabe eines „Wertes“ $J(t_0)$ eindeutig bestimmte Funktion $J(t)$ als einen wachsenden Teilbogen. Der obere bzw. untere Endpunkt $P'(t)$ bzw. $P''(t)$ von $J(t)$ kann dann als die zu t gehörige Lage von $P'(t_0)$ bzw. $P''(t_0)$ bezeichnet werden. Und der betrachtete Prozeß heißt monoton, wenn Erstens jeder Endpunkt eines Teilbogens von $i(t)$ zugleich Endpunkt eines wachsenden Teilbogens oder im Innern eines, für beliebig wenig größere t vorhandenen wachsenden Teilbogens enthalten ist (Gewinnstützpunkt!); und wenn Zweitens die $P(t)$ u. s. w. sich stetig ändern mit t, es sei denn, daß $P(t)$ u. s. w. gemeinsamer Endpunkt zweier wachsender Teilbogen (Verluststützpunkt!) ist. Die weitere Entwickelung bietet nun keine wesentlichen Schwierigkeiten. — Da die vorstehend skizzierten Definitionen lediglich das Vorhandensein des Intervallsystems $i(t)$ voraussetzen, ist damit zugleich ein abstrakter (von der Betrachtung der Schnittpunkte von Kreis und Bogen losgelöster) Aufbau der Theorie der monotonen Prozesse angedeutet (Vgl. Fußnote 14).

d) *Wieder seien R, Q beide bewegliche Schnittpunkte oder einer unter ihnen ein Endpunkt von $\mathfrak{C}$. Ferner sei $\overset{\frown}{RQ}$ ein abnehmender Bogen* (vgl. **c**)), *welcher jetzt zwar bewegliche, aber keine festgehaltene Punkte aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ enthalten darf.*

Dann liegen diejenigen Stützpunkte, in welchen innerhalb $\overset{\frown}{RQ}$ Gewinne auftreten, sämtlich auf einer und derselben Seite (vgl. I., Nr. **2**, 4) von $\mathfrak{C}$, nämlich *auf der gleichen Seite, wie eine Umgebung von R (oder Q) auf demjenigen Teilbogen von $\mathfrak{K}$, welcher R und Q verbindet und welcher die fraglichen Stützpunkte enthält*; alle Stützpunkte, in welchen innerhalb $\overset{\frown}{RQ}$ *Verluste* eintreten, liegen auf der dazu entgegengesetzten Seite. Bezeichnen wir die Stützpunkte der ersteren Art als **Gewinnstützpunkte,** die der zweiten Art als **Verluststützpunkte auf $\overset{\frown}{RQ}$ bezüglich** (der gegebenen Richtung) **des vorgelegten monotonen Prozesses,** so können wir also auch sagen:

Alle Gewinnstützpunkte auf $\overset{\frown}{RQ}$ liegen gleichartig bezüglich $\mathfrak{C}$ (vgl. I., Nr. **2**, 6); *ebenso liegen alle Verluststützpunkte gleichartig. Hingegen liegt ein Gewinnstützpunkt nicht gleichartig mit einem Verluststützpunkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung bewegen sich R *und* Q monoton aufeinander zu. Mithin kann, da keine festgehaltenen (Schnitt-)Punkte innerhalb $\overset{\frown}{RQ}$ liegen sollen, zwischen R und Q nur eine gerade Anzahl Schnittpunkte aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ auftreten. Daher liegt eine untere Umgebung von R auf $\mathfrak{K}$ auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$ wie eine obere Umgebung von Q auf $\mathfrak{K}$, beide also etwa auf der negativen Seite von $\mathfrak{C}$. Um weitere Aussagen machen zu können, nehmen wir o. B. d. A. an, daß R auf $\mathfrak{C}$ unterhalb Q liegt. Nun seien R' und Q' zwei Schnittpunkte innerhalb $\overset{\frown}{RQ}$, wobei R' auf $\mathfrak{C}$ unterhalb Q' liegt und wobei R', Q'

sich voneinander wegbewegen. Dann liegt eine untere Umgebung von R' und eine obere von Q' auf $\mathfrak{K}$ auf der positiven Seite von $\mathfrak{C}$. Somit liegt $\mathfrak{K}$ in der Umgebung eines Gewinnstützpunktes auf der positiven Seite von $\mathfrak{C}$ (abgesehen vom Stützpunkt selbst). Entsprechend liegt die Umgebung eines Verluststützpunktes auf der negativen Seite von $\mathfrak{C}$. Daraus folgt die Behauptung.

1, 54. Mit Hilfe der Feststellungen in Nr. **1**, 53 können wir nun auch *im Großen das Eintreten von Verlusten und Gewinnen bei einem monotonen Prozeß* (der also insbesondere stets seine Richtung beibehält) *überblicken*. Wir beschränken dabei die Betrachtung immer auf einen *Teilbogen* $\mathfrak{T}$, *innerhalb dessen die Bewegung der (nicht festgehaltenen) Punkte aus* $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{K}$ *gemäß dem speziellen Monotoniesatze erfolgt und innerhalb dessen die festgehaltenen Punkte von* $\mathfrak{T}$ *Schnittpunkte sind und bleiben und sich nicht aufspalten* (vgl. die Voraussetzung zu Beginn der Nr. **1**, 53).

Wir haben dann bei Beginn des Prozesses eine *Summe* $\mathfrak{D}$ *aus endlich vielen offenen paarweise fremden Teilbogen, die ständig frei sind*, also monoton wachsen. Die Gesamtheit der Begrenzungspunkte der Menge $\mathfrak{D}$, also der ständig freien Teilbogen, liefert genau die Punkte von $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$, abgesehen höchstens von Endpunkten von $\mathfrak{T}$ sowie abgesehen von den festgehaltenen Punkten (und zwar von denjenigen im Innern, sei es eines wachsenden, sei es eines abnehmenden Teilbogens), abgesehen schließlich von Gewinnstützpunkten, aus welchen ständig freie Teilbogen erst entstehen. Man beachte dabei, daß *ein beweglicher Schnittpunkt gleichzeitig sowohl einen abnehmenden als auch einen wachsenden Teilbogen begrenzt.*

Im Verlaufe des monotonen Prozesses *wächst* $\mathfrak{D}$, *während ihr abgeschlossenes Komplement* $\mathfrak{F}$ *bezüglich* $\mathfrak{T}$ *abnimmt*. Insbesondere kann dieses Abnehmen von $\mathfrak{F}$ bewirkt werden durch *Entstehen neuer, ständig freier Teilbogen im Innern von* $\mathfrak{F}$; dies entspricht dem *Gewinn* neuer Punkte von $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ im Innern von $\mathfrak{T}$, und umgekehrt entsteht bei jedem Gewinn ein ständig freier Teilbogen im Innern von $\mathfrak{F}$.

Andererseits können sich im Verlaufe des Prozesses zwei *ständig freie Teilbogen* wachsend *zu einem einzigen ständig freien Teilbogen vereinigen* (sog. **Zusammenrücken** von Punkten); dies entspricht dem *Verluste* von vorhandenen Punkten aus $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ im Innern von $\mathfrak{T}$; und umgekehrt tritt im Falle eines Verlustes eine Vereinigung bislang getrennter ständig freier Teilbogen ein.

Durch das Verhalten der Punktmengen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{F}$ im Verlaufe des monotonen Prozesses kann somit das Verhalten bei Gewinn und Verlust völlig beschrieben werden. Hieraus insbesondere folgt noch:

Setzt man (wie hier stets), $\mathfrak{T}$ *als von endlicher zyklischer Ordnung voraus, so ist mit Gewinnen und Verlusten von Punkten aus* $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ *im Innern von* $\mathfrak{T}$ *immer das Auftreten von Stützpunkten verbunden. Nach Voraussetzung ist dabei ausdrücklich abzusehen von den festgehaltenen* (Schnitt-)*Punkten*, genauer vom Falle des Gewinnes oder Verlustes in einem solchen Punkte; dieser Fall tritt allerdings nicht ein für feste Schnittpunkte innerhalb eines *wachsenden* Teilbogens.

Anmerkung. Diese Behauptung betr. Auftreten von Stützpunkten gilt insbesondere beim Aufspalten eines nicht festgehaltenen Schnittpunktes (vgl. Nr. **1**, 53; **b**). Man beachte, daß hierbei *beliebig* „kurze Zeit" nach erfolgtem Aufspalten Gewinn- *und* Verluststützpunkte, und zwar in beliebiger Nähe des sich aufspaltenden Schnittpunktes auftreten können. Ist also für $t < t_0$ in der Umgebung des Punktes P_0 nur *ein* (Schnitt-)Punkt vorhanden, der mit $t \to t_0$ gegen P_0 monoton konvergiert, enthält hingegen für gegen t_0 von obenher sich häufende t eine *beliebig kleine* Umgebung von P_0 mehr als einen Punkt, so wird es eine Folge von Parameterwerten $t_\nu > t_0$ geben mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} t_\nu = t_0$ derart, daß für hinreichend großes ν in beliebiger Nähe von P_0 Stützpunkte vorhanden sind.

1, 55. Bezüglich des Auftretens von *Gewinnen und Verlusten auf einem Teilbogen* $\mathfrak{I}$ *von* $\mathfrak{B}$ *im Laufe eines monotonen Prozesses* möge noch folgendes bemerkt werden. *Wesentliche Voraussetzung* ist dabei, daß $\mathfrak{B}$ *von endlicher zyklischer Ordnung* sei und daß *auf dem betrachteten Teilbogen* $\mathfrak{I}$ *der spezielle Monotoniesatz gilt* (vgl. auch die Voraussetzung zu Beginn der Nr. **1**, 53).

I. Es ist durchaus denkbar, daß auf solchen Bogen im Laufe eines monotonen Prozesses unendlich viele Gewinne und Verluste eintreten; es müssen nur, wegen der vorausgesetzten endlichen zyklischen Ordnung von $\mathfrak{B}$, Gewinne und Verluste in geeigneter Weise abwechseln. Da im übrigen der betrachtete Kreis sich während des Prozesses stetig verändert, bringt ein solches Vorkommnis keinerlei Schwierigkeit für das Folgende mit sich.

Es ist aber ausgeschlossen, daß auf $\mathfrak{I}$ *im Laufe des monotonen Prozesses nacheinander unbegrenzt viele Gewinne ohne irgendwelche dazwischen vorkommende Verluste stattfinden und daß diese Gewinne auf einmal wieder verloren gehen, so daß dann doch stets nur endlich viele Punkte aus* $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$ *vorhanden wären.* Genauer gesagt: Es ist ausgeschlossen, daß, z. B. bei Annäherung von t an t_0 von unten her, keinerlei Verluste stattfinden und daß die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$ über alle Grenzen wächst, um für $t = t_0$ plötzlich wieder auf einen bestimmten endlichen Wert abzusinken.

In der Tat: Wächst die Anzahl der Punkte aus $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$ für $t \to t_0$ über alle Grenzen, ohne daß Verluste dazwischen eintreten, so auch die Anzahl aller paarweise fremden, offenen, ständig freien Teilbogen. Da für $t < t_0$ keine Verluste eintreten sollen, so bleibt jeder einmal vorhandene bzw. entstandene ständig freie Teilbogen, stets wachsend, fremd zu allen übrigen derartigen Teilbogen. Für $t = t_0$ können dann — äußerstenfalls — die Begrenzungspunkte von je zwei benachbarten ständig freien Teilbogen zusammenfallen, so daß für $t = t_0$ unendlich viele solche Begrenzungspunkte, also zu $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$ gehörige Punkte vorhanden wären, im Widerspruch mit der Voraussetzung endlicher zyklischer Ordnung von $\mathfrak{I}$.

Anmerkung. Bei beliebigen (*nicht* monotonen) stetigen Änderungen braucht der obige Satz nicht zu gelten. Für den betrachteten Fall eines *monotonen* Prozesses kann die Voraussetzung, daß keine Verluste auftreten, für die Gültigkeit des Satzes im allgemeinen nicht entbehrt werden.

II. Hinsichtlich des Auftretens von Verlusten ist zu bemerken: *Es seien* S_r *und* S_q *zwei Schnittpunkte aus* $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$. *Abgesehen von* S_r *und* S_q *selbst möge zwischen diesen Punkten eine gerade Anzahl* $2s$ *von Schnittpunkten liegen* ($0 \leqq s$). *Ferner werde ein monotoner Prozeß betrachtet, bei welchem auf dem Bogen* $\mathfrak{S}_0 = \overset{\frown}{S_r S_q}$ *keine festgehaltenen Punkte aus* $\mathfrak{I} \frown \mathfrak{R}$ *liegen und bei welchem* S_r, S_q *sich aufeinander zubewegen.*

Für den Fall, daß S_r oder S_q sich aufspalten, soll mit S_r bzw. S_q stets etwa der unterste bzw. oberste der beim Aufspalten entstehenden Schnittpunkte bezeichnet werden; dabei ist S_r als unterhalb S_q auf $\mathfrak{I}$ gelegen angenommen. (Vgl. Entsprechendes in Nr. **2**, 3., Anmerkung).

Nun kann man den betrachteten Prozeß immer soweit fortsetzen, bis im Innern des, zu Beginn des Prozesses vorliegenden, Bogens $\mathfrak{S}_0$ *(mindestens) ein für den Prozeß primärer Verluststützpunkt auftritt.* Ein Verluststützpunkt heißt dabei für den Prozeß *primär*, wenn im Augenblicke seines Auftretens die doppelte Anzahl der in $\mathfrak{S}_0$ vorhandenen Verluststützpunkte vermehrt um die Anzahl der noch vorhandenen Schnittpunkte mindestens gleich $2(s + 1)$ ist. Von Anfangsverlusten ist also abgesehen. Die Menge der Parameter t, für welche primäre Verluststützpunkte auftreten, braucht kein kleinstes Element t zu besitzen ($t > t_0$).

Beweis. Es seien $S_r = X_1, X_2, \ldots, X_{2s+1}, S_q = X_{2(s+1)}$ die sämtlichen, zu Beginn des Prozesses vorhandenen *Schnitt*punkte zwischen S_r und S_q, letztere eingeschlossen, in natürlicher Anordnung auf $\mathfrak{J}$. Diese Schnittpunkte bleiben bei hinreichend kleiner Änderung von $\mathfrak{K}$ sämtlich erhalten. Der Prozeß wird in seinem Verlaufe durch Angabe der monotonen Bewegung, z. B. von X_1, eindeutig bestimmt und verläuft entsprechend dem speziellen Monotoniesatze. Verluste können also nur in Verluststützpunkten zustande kommen (vgl. Nr. **1**, 54). Entweder treten Verluste auf, während mindestens $2(s+1)$ Schnittpunkte innerhalb $\mathfrak{S}_0$ vorhanden sind; in diesem Falle ist die Behauptung richtig. Oder es kann der Prozeß *ohne* Auftreten von Gewinnen und Verlusten (vgl. Nr. **1**, 55, I.) innerhalb $\mathfrak{S}_0$ solange fortgesetzt werden, bis mindestens zwei benachbarte der $2(s+1)$ Schnittpunkte zusammenrücken und also einen Verluststützpunkt liefern; in der Tat: Da S_r und S_q sich aufeinander zubewegen, muß bei genügend langer Fortsetzung des Prozesses dieser Fall ein „erstesmal" eintreten (vollständige Induktion im Kontinuum[15])). Damit ist alles bewiesen.

1, 56. Der in Nr. **1**, 55, I. bewiesene Satz gestattet hinsichtlich des verwendeten Prozesses eine erhebliche, für später nützliche Erweiterung:

I. Der in Frage kommende Prozeß ist folgender:

***M*$_1$)** Wir legen wieder einen Bogen $\mathfrak{C}$ zugrunde, welcher der Voraussetzung zu Beginn der Nr. **1**, 53 genügt. Ferner nehmen wir im Innern von $\mathfrak{C}$ zwei Punkte R und Q an (Q oberhalb R), durch welche ein Kreis $\mathfrak{K}$ gelegt sei, derart, daß R und Q *Schnitt*punkte aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ sind, und daß auf dem offenen Teilbogen $\widehat{RQ}$ von $\mathfrak{C}$ eine *gerade Anzahl* Schnittpunkte aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ liegen, und zwar mindestens zwei. Es sei S_r der an R und S_q der an Q nächstgelegene dieser Schnittpunkte. Wir halten R und Q fest und lassen S_r und S_q sich aufeinander zu bewegen: **Monotoner Prozeß *M*$_1$**. Der Teilbogen $\widehat{S_r S_q}$ von $\widehat{RQ}$ bzw. der Prozeß genügt allen in Nr. **1**, 55, II. gemachten Annahmen. Wir können daher ***M*$_1$** fortsetzen, bis (mindestens) ein *primärer* Verluststützpunkt V_0 im Innern von $\widehat{RQ}$ auftritt. Von *Anfangsverlusten* (vgl. Nr. **1**, 53, **c)**) wird dabei abgesehen. In demjenigen Augenblick, in welchem V_0 auftritt, werde ***M*$_1$** abgebrochen; der erhaltene Kreis sei $\mathfrak{K}_1$. Auf $\widehat{RQ}$ seien außer V_0 noch die m Verluststützpunkte $V_1, \ldots, V_m$ mit $\mathfrak{K}_1$ (bezüglich ***M*$_1$**) vorhanden, ferner Gewinnstützpunkte $W_1, \ldots, W_n$ und Schnittpunkte $T_1, \ldots, T_k$; dabei ist k eine *gerade* Zahl und es gilt: $m \geqq 0, n \geqq 0, k \geqq 0$. Durch die $V_0, V_1, \ldots, V_m$; $T_1, \ldots, T_k, R; Q$ werden auf $\widehat{RQ}$ (offene) Teilbogen $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_h$ bestimmt, welche Limiten von *ständig freien Teilbogen* bezüglich ***M*$_1$** sind; und zwar werden durch die $\mathfrak{F}_\lambda$, $\lambda = 1, \ldots, h$, *sämtliche* bezüglich ***M*$_1$** ständig freie Teilbogen erfaßt, die bei Abbruch des Prozesses vorhanden sind. In dem auf $\mathfrak{C}$ untersten dieser Teilbogen ist R als Endpunkt enthalten und im obersten Teilbogen Q; in jedem der Verluststützpunkte V_μ stoßen zwei derartige $\mathfrak{F}_\lambda$ zusammen.

***Z*$_1$)** Wir machen nun die (bei der späteren Anwendung erfüllte) *Annahme*, daß durch eine *beliebig klein* wählbare stetige Änderung von $\mathfrak{K}_1$ der Stützpunkte V_0 in mindestens vier Schnittpunkte und gleichzeitig alle übrigen in $\widehat{RQ}$ vorhandenen Verluststützpunkte $V_1, \ldots, V_m$ (bezüglich ***M*$_1$**) aus $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}_1$ je in mindestens zwei Schnittpunkte aufgelöst werden können; eine Änderung heißt dabei *beliebig klein*, wenn sie nur Kreise aus einer beliebig kleinen Umgebung des ursprünglichen Kreises $\mathfrak{K}_1$ liefert. Eine Änderung ***Z*$_1$** der eben beschriebenen Art bezeichnen wir als einen **Zwischenprozeß.** Wählen wir ***Z*$_1$** hinreichend klein, d. h. führen wir $\mathfrak{K}_1$ durch einen Zwischenprozeß ***Z*$_1$** in einen, zu $\mathfrak{K}_1$ hinreichend benachbarten Kreis $\tilde{\mathfrak{K}}_1$ über, so ändern sich $R, Q, T_1, \ldots, V_0, V_1, \ldots$ be-

[15]) Vgl. z. B. a. a. O. [11]), 1. Bd., S. 38.

liebig wenig, während die $W_1, \ldots, W_n$ sämtlich oder zum Teil verlorengehen dürfen. $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ hat dann in beliebig vorgeschriebener Umgebung $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_1$ von R bzw. Q eine ungerade Anzahl *Schnitt*punkte mit $\mathfrak{C}$, deren unterster bzw. oberster R_1 bzw. Q_1 sei; dabei liegt dann eine untere Umgebung von R bzw. von Q auf $\mathfrak{K}_1$ auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$, wie eine untere Umgebung von R_1 bzw. von Q_1 auf $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$. Ferner hat $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ mit beliebig klein vorgeschriebenen paarweise fremden Umgebungen $\mathfrak{T}_1, \ldots$ bzw. $\mathfrak{W}_1, \ldots$ bzw. $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}_1, \ldots$ von $T_1, \ldots$ bzw. von $W_1, \ldots$ bzw. von $V_0, V_1, \ldots$ auf $\mathfrak{C}$ je eine ungerade bzw. je eine gerade Anzahl Schnittpunkte gemeinsam. Und außerhalb der genannten Umgebungen liegen keine Punkte aus $\widehat{RQ} \frown \widetilde{\mathfrak{K}}_1$. Man kann $\boldsymbol{Z_1}$ und damit die Umgebungen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{T}_1, \ldots$ bzw. $\mathfrak{W}_1, \ldots$ bzw. $\mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}_1, \ldots$ überdies so klein wählen, daß ein beliebig vorgegebener, in $\mathfrak{F}_\lambda$ enthaltener abgeschlossener Teilbogen $\mathfrak{G}_\lambda$ völlig außerhalb dieser sämtlichen Umgebungen bleibt ($\lambda = 1, \ldots, h$). Bei einer derartigen Wahl von $\boldsymbol{Z_1}$ sagen wir, daß *sowohl* der *Ausgangsbogen* $\widehat{RQ}$ *als* auch die *bezüglich* $\boldsymbol{M_1}$ *ständig freien Teilbogen* von $\widehat{RQ}$ *im wesentlichen erhalten* bleiben. *Die einmal gewählten* $\mathfrak{G}_\lambda$ *sollen im folgenden durchaus festgehalten werden.* Da V_0 primärer Verluststützpunkt bei $\boldsymbol{M_1}$ sein sollte, so beträgt die Anzahl der im Innern von $\widehat{RQ}$ gelegenen Schnittpunkte von $\widehat{RQ} \frown \widetilde{\mathfrak{K}}_1$ um mindestens 2 mehr, als die Anzahl der innerhalb $\widehat{RQ}$ gelegenen Schnittpunkte von $\widehat{RQ} \frown \mathfrak{K}$.

$\boldsymbol{M_2}$). Wir führen jetzt mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ und $\mathfrak{C}$ einen weiteren monotonen Prozeß $\boldsymbol{M_2}$ aus, indem wir R_1 und Q_1 festhalten, die monotone Änderung selbst aber so wählen, daß R_1 und Q_1 im Innern von Teilbogen liegen, welche bezüglich $\boldsymbol{M_2}$ ständig frei sind. Dann wird jeder von Punkten aus $\mathfrak{C} \frown \widetilde{\mathfrak{K}}_1$ freie Teilbogen, in welchem ein $\mathfrak{G}_\lambda$ enthalten ist, zu einem bezüglich $\boldsymbol{M_2}$ ständig freien Teilbogen. In der Tat: Untere Umgebungen von R bzw. Q auf $\mathfrak{K}_1$ liegen auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$ wie solche von R_1 bzw. Q_1 auf $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$. Ferner verlaufen je auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$: Untere Umgebungen auf $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ des untersten und des obersten derjenigen Schnittpunkte aus $\mathfrak{C} \frown \widetilde{\mathfrak{K}}_1$, welche je aus *einem* bestimmten Schnittpunkte $T_\varkappa$ vermöge $\boldsymbol{Z_1}$ gewonnen werden; und auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$ wie diese Umgebungen verläuft dann auch eine untere Umgebung von $T_\varkappa$ auf $\mathfrak{K}_1 (\varkappa = 1, \ldots, k)$. Schließlich liegt $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ je auf der gleichen Seite von $\mathfrak{C}$ in der Nähe unterhalb bzw. oberhalb des untersten bzw. obersten derjenigen Schnittpunkte aus $\mathfrak{C} \frown \widetilde{\mathfrak{K}}_1$, welche je aus *einem* bestimmten Stützpunkte V_μ vermöge $\boldsymbol{Z_1}$ gewonnen werden; und auf eben dieser Seite liegt $\mathfrak{K}_1$ in der Nähe von $V_\mu (\mu = 0, 1, \ldots, m)$. Daraus folgt, daß die genannten obersten bzw. untersten Punkte bei $\boldsymbol{M_2}$ die gleiche Bewegungsrichtung besitzen, wie sie bei $\boldsymbol{M_1}$ diejenigen Punkte hatten, aus welchen $T_1, \ldots, V_0, V_1, \ldots$ entstanden waren.

Da nach Definition des Zwischenprozesses $\boldsymbol{Z_1}$ bei diesem sogar noch Schnittpunkte innerhalb $\widehat{RQ}$ gewonnen werden, nämlich infolge Auflösung von V_0 bzw. $V_1, \ldots, V_m$ in mindestens 4 bzw. in je mindestens 2 Schnittpunkte, so ergibt sich jetzt:

Wird der Zwischenprozeß $\boldsymbol{Z_1}$ *nur hinreichend klein gewählt, so ist die Zahl der innerhalb* $\widehat{RQ}$ *gelegenen ständig freien Teilbogen bezüglich* $\boldsymbol{M_2}$ *um mindestens Eins größer als die entsprechende Anzahl bezüglich* $\boldsymbol{M_1}$. *Ferner hat jeder solche, bezüglich* $\boldsymbol{M_1}$ *ständig freie Teilbogen* $\mathfrak{F}_\lambda$ *mit genau einem bezüglich* $\boldsymbol{M_2}$ *ständig freien einen Durchschnitt, in welchem ein, ein für allemal fest gewählter, abgeschlossener Teilbogen* $\mathfrak{G}_\lambda$ *enthalten ist.*

II. Aus der Feststellung am Schlusse von $\boldsymbol{M_2}$ ergibt sich nun, wie in Nr. 1, 55, I., daß *eine ununterbrochen abwechselnde Folge* $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{M_2}, \boldsymbol{Z_2}, \ldots$ *von monotonen Prozessen* $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}, \boldsymbol{M_3}, \ldots$ *und je hinreichend klein gewählten* (vgl. den nachfolgenden Zusatz) *Zwischenprozessen* $\boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{Z_2}, \boldsymbol{Z_3} \ldots$ *unmöglich ist, sobald* $\mathfrak{C}$ *von endlicher zyklischer Ordnung ist.* In der Tat wirkt sich ja ein durch die Folge $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{Z_1}, \boldsymbol{M_2}, \boldsymbol{Z_2}, \boldsymbol{M_3}, \boldsymbol{Z_3}, \ldots$ definierter Pro-

zeß Π auf die Verteilung der Punkte von $\mathfrak{C} \frown \mathfrak{K}$ zwischen R und Q „im wesentlichen" gar nicht anders aus als ein einziger monotoner Prozeß. Es ist also nicht möglich, daß bei Π zwischen R und Q, genauer gesagt: innerhalb eines *beliebig* vorgeschriebenen, *R und Q* enthaltenden Teilbogens, unbegrenzt viele Gewinne von jeweils ständig freien Teilbogen stattfinden, ohne dazwischen eintretende (hinreichend große) Verluste. Daraus folgt die Behauptung.

Zusatz. „Hinreichend klein gewählt" soll besagen: Ein jeder der Prozesse $\boldsymbol{Z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, soll (mindestens) so klein gewählt werden, daß in seinem Verlauf *alle*, beim Beginn von $\boldsymbol{Z}_\nu$ vorhandenen Schnittpunkte erhalten bleiben, die innerhalb des beim Beginne von $\boldsymbol{Z}_\nu$ vorhandenen Ausgangsbogens $\overset{\frown}{R_{\nu-1}Q_{\nu-1}}$ liegen, einschließlich der Schnittpunkte $R_{\nu-1}, Q_{\nu-1}$ selbst ($R_0 = R, Q_0 = Q$). Diese Wahl von $\boldsymbol{Z}_\nu$ ist für jedes ν möglich, weil ja $\boldsymbol{Z}_\nu$ beliebig klein sein darf.

1, 57. Wir bemerken schließlich noch folgendes: *Die im Laufe eines monotonen Prozesses oder Zwischenprozesses gegebenenfalls auftretenden Kreise, welche Endpunkte von* $\mathfrak{T}$ (vgl. Nr. **1**, 54, Beginn) *oder Stützpunkte tragen, liegen nirgends dicht*, d. h. liegt für den Parameterwert t_0 ($0 < t_0 < 1$) ein solcher Kreis vor, so gibt es in beliebiger Nähe ober- *und* unterhalb von t_0 solche t-Intervalle, daß die den Parameterwerten aus einem solchen Intervall entsprechenden Kreise sämtlich *nur* Schnittpunkte tragen, und zwar sämtlich die gleiche Anzahl Schnittpunkte. Der Beweis ergibt sich aus Nr. **1**, 24 sowie aus der Tatsache, daß es höchstens zwei Kreise eines Büschels gibt, welche Endpunkte von $\mathfrak{T}$ enthalten, falls die Endpunkte nicht zu den Grundpunkten des Büschels gehören.

§ 2. Erster monotoner Prozeß.

2, 1. Nach den Vorbereitungen in § 1 gehen wir jetzt an die Konstruktion der gewünschten normierten Kreissysteme. Und zwar wird der erste Schritt unserer Konstruktion bestehen in der Ausführung eines bestimmten, sogleich im einzelnen zu beschreibenden monotonen Prozesses. Gemäß des Satzes in I., Nr. **2**, 8, gehen wir aus von einem Konvexbogen $\mathfrak{B}$, welcher als total ordnungshomogen von mindestens fünfter und höchstens endlicher zyklischer Ordnung vorausgesetzt werde. Es existiert dann ein Kreis $\mathfrak{K}^{**}$, welcher mit einem beliebig vorgegebenen Teilbogen $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ mindestens fünf verschiedene Punkte gemeinsam hat. Zufolge des Reduktionssatzes [16]) gibt es einen zu $\mathfrak{K}^{**}$ *beliebig benachbarten Kreis* $\mathfrak{K}$, welcher mit $\mathfrak{C}$ mindestens fünf verschiedene (im *Innern* von $\mathfrak{C}$ gelegene) *Schnitt*punkte besitzt. Ein solcher Kreis $\mathfrak{K}$ heiße ein Ausgangskreis *für* $\mathfrak{B}$ *bezüglich* $\mathfrak{C}$.

2, 2. Es sei nun $\mathfrak{T}$ ein *beliebiger* offener Teilbogen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{T}'$ ein *beliebiger* offener Teilbogen von $\mathfrak{T}$. Ferner sei $\mathfrak{K}$ ein Ausgangskreis für $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{T}'$ (vgl. Nr. **2**, 1). Weiter seien $P_1, P_2, \ldots, P_m$ die sämtlichen, natürlich geordneten Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}$, wobei P_1 der auf $\mathfrak{T}$ *unterste* Schnittpunkt sein soll. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Orientierung von $\mathfrak{T}$ bei Übergang zur Orientierung von $\mathfrak{B}$ erhalten bleibt. Es gilt $m \geqq 5$. Es sei ferner k der größte *ungerade* Index, so daß P_k noch in $\mathfrak{T}'$ liegt. Zufolge der Voraussetzungen ist $k \geqq 5$ und außer P_k liegen noch (mindestens) P_{k-1}, P_{k-2}, P_{k-3} in $\mathfrak{T}'$. (Falls P_{k-4} *nicht* in $\mathfrak{T}'$ liegt, muß P_{k+1} der in $\mathfrak{T}'$ oberste Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}$ sein; übrigens hat dann $\mathfrak{T}$ unterhalb $\mathfrak{T}'$ noch eine ungerade Anzahl Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ gemeinsam, nämlich $P_1, \ldots, P_{k-4}$. Jedenfalls ist *entweder P_k oder P_{k+1}* der in $\mathfrak{T}'$ oberste Schnittpunkt.) Schließlich sei q ein *gerader* Index mit $q \leqq k-3$, so daß P_q in $\mathfrak{T}'$ liegt.

Nunmehr wenden wir (vgl. Nr. **1**, 56, I.) folgenden ersten monotonen Prozeß $\boldsymbol{M_1}$ *bezüglich* $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$ auf unseren Kreis $\mathfrak{K}$ an: *Wir halten P_q sowie P_k fest und lassen P_{q+1} und*

[16]) Vgl. a. a. O. [6]), Nr. **2**, 4, sowie auch Nr. **1**, 6; a.

P_{k-1} *sich gegeneinander* bewegen. Da hier der spezielle Monotoniesatz gilt (vgl. Nr. **1**, 4), so bewegt sich jeder P_ν bei ungeradem ν mit $\nu \leqq q-1$ oder bei geradem ν mit $q+2 \leqq \nu \leqq k-1$ auf $\mathfrak{T}$ nach abwärts, bei geradem ν mit $\nu \leqq q-2$ oder bei ungeradem ν mit $q+1 \leqq \nu \leqq k-2$ nach aufwärts (soweit überhaupt $q > 2$ ist); *es bewegen sich also insbesondere* P_1 *sowie der zu* P_q *nach unten nächstgelegene Schnittpunkt* P_{q-1} *nach abwärts* ($1 \leqq q-1$), *während der zu* P_k *nach oben nächstgelegene Schnittpunkt* P_{k+1}, soweit ein solcher auf $\mathfrak{T}$ überhaupt vorhanden ist, *sich nach aufwärts bewegt.* (P_{q+1} *und* P_{k-1} *bewegen sich gegeneinander.*)

2, 3. Für unsere Zwecke wird die Lage der aus dem Ausgangskreise vermöge $\boldsymbol{M_1}$ zu gewinnenden Kreise *lediglich unterhalb* P_k von Interesse sein. Wir wollen nämlich, wie das durch die Definition der normierten Kreissysteme nahegelegt wird, zunächst zu einem Kreis $\mathfrak{K}(V)$ gelangen, welcher bezüglich $\mathfrak{T}$ gleichartig liegt mit dem Ausgangskreis (vgl. I., Nr. **2**, 6), welcher ferner unterhalb und in hinreichender Nähe von P_q einen Schnittpunkt sowie zwischen P_q und P_k (mindestens) einen für $\boldsymbol{M_1}$ *primären Verluststützpunkt* V enthält. Schließlich soll $\mathfrak{K}(V)$ bezüglich $\mathfrak{T}$ und V gleichartig liegen.

Um dies zu erreichen, werden wir versuchen, im Verlaufe von $\boldsymbol{M_1}$ (und der folgenden Prozesse) immer wieder Kreise zu erhalten, welche unterhalb P_k sowie zwischen P_q und P_k eine gerade Anzahl Schnittpunkte aufweisen, und zwar mindestens zwei zwischen P_q und P_k; *welche ferner den unteren Endpunkt A von* $\mathfrak{T}$ *nicht enthalten* und immer mit dem Ausgangskreise gleichartig liegen bezüglich $\mathfrak{T}$. Kreise dieser Beschaffenheit wollen wir als Quasi-Ausgangskreise *bezüglich* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ bezeichnen, und zwar auch dann, wenn sie nicht im Verlaufe von $\boldsymbol{M_1}$, sondern gegebenenfalls durch andere anschließende Zwischen- und monotone Prozesse (im Sinne von Nr. **1**, 56) erzeugt sind.

Um zu einem Kreise $\mathfrak{K}(V)$ zu gelangen, haben wir zunächst alle Möglichkeiten eines Gewinnes oder Verlustes *unterhalb* P_k im Verlaufe von $\boldsymbol{M_1}$ zu prüfen. Da P_q und P_k im Innern von Teilbogen liegen, welche bezüglich unserer Prozesses ständig frei sind, so kommen für unsere Untersuchung nur nachstehende Möglichkeiten in Betracht:

$_g$I. Über den *unteren Endpunkt* A von $\mathfrak{T}$ rücken Punkte von $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ herein, d. h. in A werden Punkte gewonnen, indem ein, bezüglich $\boldsymbol{M_1}$ ständig freier Teilbogen, von A ausgehend, nach oben hin sich ausdehnt.

$_v$I. Der Punkt P_1 rückt über den *unteren Begrenzungspunkt* A hinaus, d. h. in A werden Punkte verloren, indem der untere Endpunkt eines bezüglich $\boldsymbol{M_1}$ ständig freien Teilbogens von oben her über A hinausrückt.

$_s$II. *Unterhalb* P_1 aber innerhalb $\mathfrak{T}$, *oder zwischen* P_1, diesen eingeschlossen, *und* P_q treten Gewinne oder Verluste auf.

II$_s$. Zwischen P_q und P_k treten Gewinne auf.

III. Zwischen P_q und P_k treten für $\boldsymbol{M_1}$ primäre Verluststützpunkte V auf.

Die Möglichkeit, daß von den vorstehend aufgezählten Fällen mehrere *gleichzeitig* auftreten, ist zugelassen. Tritt etwas derartiges ein, so soll für die nachstehenden Betrachtungen folgendes verabredet werden: Sind Fälle $_g$I, $_v$I beteiligt, so werden nur sie berücksichtigt. Treffen $_s$II oder II$_s$ und III zusammen, so wird nur III berücksichtigt.

Anmerkung. Sollte im Laufe des ersten monotonen Prozesses einer der Punkte P_{q+1} oder P_{k-1} sich in mehrere Schnittpunkte aufspalten (vgl. Fall II$_s$), so werde bei Fortsetzung des Prozesses mit P_{q+1} bzw. mit P_{k-1} der jeweils am nächsten oberhalb bzw. unterhalb von P_q bzw. von P_k gelegene Schnittpunkt aus $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ bezeichnet.

2, 4. Von den Fällen I—III sind für die Konstruktion der von uns gewünschten Kreise $\mathfrak{K}(V)$ hinderlich alle bis auf III, mit welchem $\mathfrak{K}(V)$ schon erreicht wäre. Wir werden aber jetzt (§ 3) zeigen, daß von den Fällen $_g$I bis II$_s$ ohne Beschränkung der

Allgemeinheit abgesehen werden kann, so daß nur Fall III übrig bleibt. Wie man von Fall III aus dann zum gesuchten normierten Kreissystem gelangt, wird in §§ 4ff. gezeigt.

§ 3. Untersuchung des ersten monotonen Prozesses.

3, 1. Wir zeigen zunächst: Von den Fällen ${}_g$I und ${}_v$I kann abgesehen werden, sobald man nur die Ausgangskreise der Bedingung unterwirft, daß sie mit einem geeignet gewählten *abgeschlossenen Teilbogen* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *von* $\mathfrak{T}'$ mindestens drei Schnittpunkte gemeinsam haben. Dabei handelt es sich, entsprechend der Verabredung in Nr. **2**, 3, immer darum, daß die betrachteten Fälle ${}_g$I bzw. ${}_v$I *vor* oder höchstens gleichzeitig *mit* irgendeinem der übrigen Fälle aus Nr. **2**, 3 eintreten; bei einem solchen Eintreten eines Falles I sind jedenfalls im Innern von $\mathfrak{T}'$ noch mindestens drei Punkte von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ vorhanden, nämlich P_q, P_k und P_{q+1}, P_{k-1}, wobei $P_{q+1} = P_{k-1}$ zuzulassen ist. Es genügt daher, folgendes zu beweisen:

3, 1. Satz. *Es sei* $\mathfrak{B}$ *ein abgeschlossener zyklisch-ordnungshomogener Bogen von mindestens fünfter und höchstens endlicher Ordnung. Ferner sei* $\mathfrak{T}$ *ein beliebiger offener Teilbogen von* $\mathfrak{B}$, *ferner* $\mathfrak{T}'$ *ein beliebiger offener Teilbogen von* $\mathfrak{T}$, *wobei auch* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$ *zugelassen ist.*

1. *Zu beliebig gegebenen* $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \widetilde{\mathfrak{T}}$, *wobei* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *einen abgeschlossenen Teilbogen von* $\mathfrak{T}'$ *bezeichnet, existiert dann ein* $(\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}})$-Ausgangskreis $\mathfrak{K}$, *d. h. ein Kreis, welcher mit* $\mathfrak{T}$ *mindestens fünf Schnittpunkte gemeinsam hat, von denen mindestens drei in* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *liegen.*

2. *Ferner kann man* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *als abgeschlossenen Teilbogen des beliebig vorgegebenen offenen Teilbogens* $\mathfrak{T}'$ *von* $\mathfrak{T}$ *so bestimmen, daß für jeden* $(\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}})$*-Ausgangskreis* $\mathfrak{K}$ *folgendes gilt: Bei keiner einzigen Änderung im nachstehend erklärten Sinne fällt jemals ein Punkt von* ($\mathfrak{K}$ *bzw.*) $\mathfrak{K}'$ *mit dem unteren Endpunkt* A *von* $\mathfrak{T}$ *zusammen (sei es daß ein Punkt von unten her über* A *nach* $\mathfrak{T}$ *hineinrückt; sei es daß einer von oben her über* A *aus* $\mathfrak{T}$ *hinausrückt.) Dabei wird der* $(\mathfrak{T}, \widetilde{\mathfrak{T}})$*-Ausgangskreis solchen stetigen Änderungen unterworfen, in deren Verlaufe immer nur solche Kreise* $\mathfrak{K}'$ *auftreten, die mit* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *mindestens drei Punkte gemeinsam haben.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{C}$ ein (beliebig) vorgegebener, abgeschlossener Teilbogen von $\mathfrak{T}'$. Ferner sei $\underline{\mathfrak{K}}$ ein $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$-Ausgangskreis (der also mit $\mathfrak{C}$ mindestens drei Schnittpunkte gemeinsam hat), welcher wie folgt beschaffen ist: Es gibt eine stetige Änderung im Sinne der Behauptung 2, durch welche $\underline{\mathfrak{K}}$ überführbar ist in einen Kreis, welcher mit $\mathfrak{C}$ noch mindestens drei Punkte gemeinsam hat und welcher durch den unteren Endpunkt A von $\mathfrak{T}$ geht. Existiert zu $\mathfrak{C}$ ein solcher Kreis $\underline{\mathfrak{K}}$, so heiße $\mathfrak{C}$ ein *E-Bogen*.

Wäre nun die Behauptung unseres Satzes nicht richtig, so müßten auf $\mathfrak{T}'$ (und auf jedem Teilbogen) die E-Bogen dicht liegen (vgl. Nr. **1**, 11; **1**, 12). Betrachten wir also irgendeinen abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{T}_0$ von $\mathfrak{T}'$. Es sei b das Bündel der Kreise, welche sämtlich durch A gehen. Dann würde jeder Teilbogen von $\mathfrak{T}_0$ von mindestens einem Bündelkreise in mindestens drei Punkten getroffen; unter diesen drei Punkten dürfen sich auch Stützpunkte befinden. Da A fremd zu $\mathfrak{T}_0$ angenommen werden kann und da $\mathfrak{T}_0$ von jedem Kreise in (höchstens) endlich vielen Punkten getroffen wird, so ginge $\mathfrak{T}_0$ vermittelst Transformation durch reziproke Radien mit A als Zentrum über in einen Bogen, welcher ordnungshomogene Teilbogen von mindestens dritter und höchstens endlicher linearer Ordnung enthielte. Derartige linear-ordnungshomogene Bogen existieren aber nicht[17]). Die Negation der Behauptung unseres Satzes führt also zu einem Widerspruch.

Aus dem Satze von Nr. **3**, 1 folgt insbesondere:

---

[17]) Vgl. I., § 6.

3, 11. Satz. *Bei Anwendung des ersten monotonen Prozesses* (vgl. Nr. **2**, 2) *treten die in Nr.* **2**, 3 *genannten Fälle* ${}_g$I, ${}_v$I *gewiß niemals auf, sobald man nur einen abgeschlossenen Teilbogen* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *von* $\mathfrak{T}'$ *passend auswählt und nur Ausgangskreise für* $\mathfrak{T}$ *bezüglich* $\mathfrak{T}'$ *betrachtet, deren jeder mit dem Innern von* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *mindestens drei Punkte gemeinsam hat.*

Gemäß Satz **3**, 11 treffen wir nun die nachstehende

Festsetzung. *Bei allen folgenden Betrachtungen werden nur solche Ausgangskreise (für* $\mathfrak{B}$*) bezüglich* $\mathfrak{T}'$ *herangezogen, welche mindestens fünf Punkte mit dem offenen Kern eines abgeschlossenen Teilbogens* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *von* $\mathfrak{T}'$ *gemeinsam haben und wobei* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *den im vorstehenden Satze* **3**, 11 *genannten Bedingungen genügt. — Außerdem sollen von jetzt ab die Bezeichnungen* P_q *und* P_k *für diejenigen Punkte gebraucht werden, welche sich ergeben, wenn in der zu Beginn von Nr.* **2**. 2. *angegebenen Konstruktion* $\mathfrak{T}'$ *durch* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *ersetzt wird.*

Solche Ausgangskreise existieren für beliebige $\widetilde{\mathfrak{T}} < \mathfrak{T}'$, da $\mathfrak{T}'$ und folglich $\widetilde{\mathfrak{T}}$ zyklisch ordnungshomogen von mindestens der Ordnung fünf sein soll.

3, 2. Das Eintreten der jetzt in Betracht kommenden Fälle ${}_s$II und II$_s$ (vgl. Nr. **2**, 3), soweit sie nicht mit einem Falle III zusammentreffen, bildet für die Fortsetzung unseres monotonen Prozesses $\boldsymbol{M_1}$ kein Hindernis, so daß $\boldsymbol{M_1}$ immer bis zum Eintreten des Falles III fortgesetzt werden kann.

Zum Beweise dieser Behauptung bemerken wir:

1. Der betrachtete, dem Prozesse $\boldsymbol{M_1}$ unterworfene Quasi-Ausgangskreis $\mathfrak{K}$ bleibt ein Quasi-Ausgangskreis, ungeachtet beliebig oftmaligen Eintretens von ${}_s$II und II$_s$, so lange wenigstens nicht Fall III eintritt. In der Tat: Um P_1 für den Fall von Gewinnen (innerhalb $\mathfrak{T}$) zwischen P_1 und dem unteren Endpunkte A von $\mathfrak{T}$ eindeutig festzulegen, *verabreden* wir: In jedem Augenblick (d. h. für jedes t) soll *der auf* $\mathfrak{T}$ *am nächsten bei* A *gelegene Schnittpunkt aus* $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ an Stelle von P_1 treten und dementsprechend *mit* P_1 *bezeichnet* werden; auch bei dieser Verabredung bewegt sich P_1 im Verlaufe von $\boldsymbol{M_1}$ monoton (aber möglicherweise unstetig) gegen A. Weil nun der Endpunkt A von $\mathfrak{T}$ keinem der im Verlaufe von $\boldsymbol{M_1}$ auftretenden, stetig sich ändernden, Kreise $\mathfrak{K}$ angehört (zufolge der Festsetzung am Schlusse von Nr. **3**, 1), so liegen sämtliche Kreise gleichartig bezüglich $\mathfrak{K}$. Überdies bleiben die je einem wachsenden Teilbogen angehörigen Schnittpunkte P_q und P_k bei $\boldsymbol{M_1}$ stets fest und Schnittpunkte, so daß ihre unteren bzw. oberen Umgebungen auf $\mathfrak{K}$ niemals auf eine andere Seite von $\mathfrak{T}$ übertreten; daher liegen alle $\mathfrak{K}$ auch gleichartig bezüglich $\mathfrak{T}$ und P_k. Infolge von ${}_s$II und II$_s$ (auch wenn solche Fälle unendlich oft auftreten sollten) ändert bzw. vermehrt sich die Anzahl der Schnittpunkte zwischen P_1 und P_q bzw. zwischen P_q und P_k nur um eine gerade Anzahl. Daher bleibt $\mathfrak{K}$ wirklich stets ein Quasi-Ausgangskreis.

2. Auf $\mathfrak{K}$ und $\boldsymbol{M_1}$ ist aber der Satz von Nr. **1**, 55, II. anwendbar. Es kann also Fall III bei hinreichend langer Fortsetzung von $\boldsymbol{M_1}$ immer erreicht werden, w. z. z. w.

3, 3. Wir wissen aus Nr. **3**, 1 und Nr. **3**, 2, daß bei Beachtung der Festsetzung am Schlusse von Nr. **3**, 1 im Verlaufe des ersten monotonen Prozesses $\boldsymbol{M_1}$ stets einmal der Fall III eintritt, also insbesondere ein Kreis mit *für* $\boldsymbol{M_1}$ *primären Verlaststützpunkten zwischen* P_q *und* P_k konstruiert werden kann. Es sei P_0 ein solcher Verlaststützpunkt und $\mathfrak{K}(P_0)$ der zugehörige Kreis. Dann liegen alle zwischen P_q und P_k vorhandenen Verlaststützpunkte von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ gleichartig mit P_0 bezüglich $\mathfrak{T}$, nämlich auf der gleichen Seite von $\mathfrak{T}$ wie eine untere Umgebung von P_1 und P_k auf $\mathfrak{K}(P_0)$ (vgl. Nr. **1**, 53, **d**).

Eine **Zusammenfassung** ergibt also folgendes:

Es sei P_0 ein für $\boldsymbol{M_1}$ *primärer Verlaststützpunkt* zwischen P_q und P_k auf dem Kreise $\mathfrak{K}(P_0)$.

1. *Der Kreis* $\mathfrak{K}(P_0)$ *liegt gleichartig bezüglich* $\mathfrak{T}$ *und* P_0, *ferner gleichartig mit dem Ausgangskreis bezüglich* $\mathfrak{T}$.

2. *Unterhalb P_0 liegen auf $\mathfrak{T}$ noch mindestens zwei Schnittpunkte von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{K}$ (nämlich mindestens P_1 und P_q).*

3. *Der nächste Schnittpunkt unterhalb P_0 liegt im Innern von $\mathfrak{T}'$ und (sogar) von $\widetilde{\mathfrak{T}}$ (es liegt nämlich P_q innerhalb $\widetilde{\mathfrak{T}}$ zufolge der „Festsetzung" in Nr. 3, 1).*

3 a. *Der nächste Schnittpunkt oberhalb P_0 liegt im Innern von $\mathfrak{T}'$ und (sogar) von $\widetilde{\mathfrak{T}}$ (es liegt nämlich P_k innerhalb $\widetilde{\mathfrak{T}}$, vgl. 3.).*

4. *Ebenso liegt P_0 im Innern von $\mathfrak{T}'$ und (sogar) von $\widetilde{\mathfrak{T}}$.*

5. *Schließlich hat sich innerhalb des Teilbogens $\overset{\frown}{P_qP_k}$ von $\mathfrak{T}$ bis zur Erreichung von $\mathfrak{K}(P_0)$ die Gesamtzahl der Schnittpunkte sicher nicht erniedrigt; das Auftreten von Verlust-stützpunkten auf $\mathfrak{K}(P_0)$ selbst ist dabei noch nicht als „Verlust" bezeichnet.*

Die in der Zusammenfassung genannten Eigenschaften von $\mathfrak{K}(P_0)$ sind für die folgenden Konstruktionen wesentlich.

3, 4. Ziel. Wir haben jetzt zu zeigen, daß mit Hilfe der (soeben, Nr. **3**, 3; Zusammenfassung) genannten Kreise $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(P_0)$ zu einem passenden Teilbogen $\mathfrak{T}^*$ von $\widetilde{\mathfrak{T}}$, also auch von $\mathfrak{T}'$, ein normiertes System von Kreisen $\mathfrak{K}(P)$ konstruiert werden kann, welches also die in I., Nr. **3**, 1 aufgezählten Eigenschaften I—VI besitzt.

In Rücksicht auf den weiteren Beweisgang führen wir folgende Bezeichnung ein: Ein Kreis $\mathfrak{K}$, welcher mit dem Bogen $\mathfrak{B}$ den Punkt P_0 gemeinsam hat, heiße vom

Typus *A*, wenn die Kreistangente in P_0 *keine* der Halbtangenten an $\mathfrak{B}$ in P_0 enthält *und* wenn P_0 Stützpunkt von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ ist;

Typus *B*, wenn die Tangente an $\mathfrak{K}$ in P_0 Träger von (mindestens) einer der Halbtangenten von $\mathfrak{B}$ in P_0 ist.

Bemerkung. Beim Typus *A* muß P_0 Ecke von $\mathfrak{B}$ sein. Es verläuft dann $\mathfrak{K}$ in der Umgebung von P_0 auf der *konvexen Seite* von $\mathfrak{B}$, d. h. auf derjenigen Seite von $\mathfrak{B}$, auf welcher jede durch P_0 gehende *Stützstrecke* von $\mathfrak{B}$ in P_0 verläuft; unter einer *Stützstrecke* von $\mathfrak{K}$ in P_0 wird dabei eine Strecke durch P_0 verstanden, von welcher $\mathfrak{B}$ in P_0 gestützt wird. — Für einen Kreis $\mathfrak{K}$ vom Typus *B* braucht P_0 gemäß der Definition des Typus *B* *nicht* Stützpunkt von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ zu sein.

§ 4. Zurückführung des Typus *A* auf den Typus *B*.

4, 1. Es sei nun $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(P_0)$ ein Kreis im Sinne von Nr. **3**, 3. Wir werden (Nr. **4**, 2) zeigen, daß sich aus einem Kreise $\mathfrak{K}_0$ vom Typus *A* stets ein Kreis vom Typus *B* gewinnen läßt, übrigens unter Festhalten des Punktes P_0. Sodann werden wir (Nr. **4**, 3 ff.), ausgehend von einem Kreise vom Typus *B* ein normiertes Kreissystem konstruieren.

4, 2. Ein Kreis $\mathfrak{K}_0$ vom *Typus A* besitzt in P_0 auf $\mathfrak{T}$ einen Stützpunkt; oberhalb P_0 liegt noch mindestens ein Schnittpunkt (jedenfalls z. B. P_k); unterhalb P_0 liegt eine gerade Anzahl Schnittpunkte (jedenfalls P_q und P_1). Wir können übrigens unter Festhalten des Stützpunktes P_0 und der Tangente an $\mathfrak{K}_0$ in P_0 den $\mathfrak{K}_0$ *beliebig wenig* so abändern, daß der Typus *A* erhalten bleibt, daß aber *alle* Punkte, welche der so entstandene Kreis $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}$ gemeinsam hat, *Schnitt*punkte sind (vgl. Nr. **1**, 24 bzw. Nr. **1**, 57), ausgenommen natürlich P_0; eine solche Abänderung werde als **erster Reduktionsprozeß** bezeichnet und, soweit nötig, stets vorgenommen. Es sei F_2 bzw. F_1 der am nächsten oberhalb bzw. unterhalb von P_0 gelegene Schnittpunkt aus $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$; dabei können und sollen F_1, F_2 als innerhalb $\widetilde{\mathfrak{T}}$ und $\mathfrak{T}'$ gelegen angenommen werden. Wir wenden jetzt auf $\mathfrak{K}_0$ folgenden **zweiten monotonen Prozeß** an, bei welchem der Stützmonotoniesatz (vgl. Nr. **1**, 42) Anwendung findet: Unter Festhalten von P_0 und F_1 lassen wir F_2 auf $\mathfrak{T}$ nach unten gegen P_0 hin wandern. Dieser Prozeß kann als Fortsetzung des auf den Ausgangskreis ausgeübten monotonen Prozesses $\boldsymbol{M_1}$ angesehen werden, welcher zu $\mathfrak{K}_0$ führte. Beide

monotonen Prozesse ergeben zusammen mit dem evtl. vorgenommenen ersten Reduktionsprozeß ersichtlich eine stetige Änderung; und diese genügt der 3. Voraussetzung des Satzes in Nr. **3**, 1, *solange nicht* F_2 mit P_0 zusammenrückt und *auf* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *mindestens drei Punkte von* $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}$ *liegen*. Zufolge der mit Festsetzung am Schlusse von Nr. **3**, 1 getroffenen Wahl von $\widetilde{\mathfrak{T}}$ rückt daher im Verlaufe auch des Reduktions- sowie des zweiten monotonen Prozesses kein Punkt aus $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ über den unteren Endpunkt A von $\mathfrak{T}$ herein oder heraus. *Es bleibt also insbesondere* P_1 *stets erhalten* [18]) *und zwar (als Schnittpunkt) so, daß* $\mathfrak{K}$ *bezüglich* $\mathfrak{T}$ *stets gleichartig liegt mit* $\mathfrak{K}_0$; etwa eintretende Verluste oder Gewinne zwischen P_1 und F_1 ändern die Anzahl der Schnittpunkte nur um ein Vielfaches von Zwei und bilden keinerlei Hindernis für die Fortführung des zweiten monotonen Prozesses. Zwischen F_1 und F_2 spielt sich beim zweiten monotonen Prozeß folgendes ab: *Der Teilbogen von* $\mathfrak{T}$ *zwischen* F_1 *und* P_0 *ist Teil eines ständig freien Bogens bezüglich des zweiten monotonen Prozesses.* Ferner rückt F_2 von oben her gegen P_0. Es ist möglich, daß zwischen F_2 und P_0 Gewinne und darauffolgende Verluste stattfinden. Unabhängig davon aber kann auf jeden Fall erreicht werden, daß im Laufe des zweiten monotonen Prozesses die Kreistangente in P_0 gegen die obere Tangente an $\mathfrak{B}$ in P_0 konvergiert. Entweder nämlich tritt die Konvergenz ein, bevor ein Punkt von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ von oben her gegen P_0 rückt. Andernfalls kann man durch genügend lange Fortsetzung des monotonen Prozesses erreichen (vollständige Induktion im Kontinuum), daß ein oberhalb P_0 auf $\mathfrak{T}$ gelegener Punkt P' des Kreises gegen P_0 konvergiert. Dann konvergiert die Verbindungsgerade von P_0 und P' gegen die obere Halbtangente an $\mathfrak{T}$ in P_0.

In beiden Fällen *konvergiert der Kreis gegen einen Kreis* $\mathfrak{K}'$ *durch* P_0, F_1 *(und* P_1*), welcher in* P_0 *die Trägergerade der oberen Halbtangente an* $\mathfrak{T}$ *als Tangente besitzt.* Dabei gehört F_1 sicher zu $\widetilde{\mathfrak{T}}$, ebenso P_0. Im Falle, daß P_1 nach A rückt, wenn P' mit P_0 zusammenrückt, nimmt man zum zweiten monotonen Prozeß noch folgende monotone Änderung hinzu: Man hält P_0 und die Tangente in P_0 an $\mathfrak{K}'$ fest und bewegt F_1 hinreichend wenig monoton gegen A hin (wobei F_1 innerhalb $\widetilde{\mathfrak{T}}$ bleibt). Nach dem Tangentenmonotoniesatz bewegt sich dann P_1 gegen F_1 hin ins Innere von $\mathfrak{T}$. Den so aus $\mathfrak{K}'$ erhaltenen Kreis läßt man an Stelle von $\mathfrak{K}'$ treten und bezeichnet ihn ebenfalls mit $\mathfrak{K}'$. Wir können also annehmen, daß $\mathfrak{K}'$ *unterhalb* P_0 *mindestens zwei, innerhalb* $\mathfrak{T}$ *gelegene Schnittpunkte besitzt, von denen mindestens einer in* $\mathfrak{T}'$ *(und sogar in* $\widetilde{\mathfrak{T}}$*) liegt.* (Zufolge Nr. **3**, 3., Zusammenfassung 1., liegt unterhalb P_0 eine gerade Anzahl Schnittpunkte von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$).

Nun liegt $\mathfrak{K}'$ *gleichartig bezüglich* $\mathfrak{T}$ *und* P_0, *und zwar gleichartig mit* $\mathfrak{K}_0$. Denn eine auf $\mathfrak{T}$ untere, den Teilbogen zwischen F_1 und P_0 enthaltende, Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{T}$ ist ständig frei bezüglich des zweiten monotonen Prozesses. Beim Grenzübergang zu $\mathfrak{K}'$ können daher auf besagtem Teilbogen nicht einmal Stützpunkte von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{T}$ entstehen. Daher verläuft $\mathfrak{K}'$, wie überhaupt jeder während des Prozesses auftretende Kreis, zwischen P_0 und F_1 auf der gleichen Seite von $\mathfrak{T}$ wie $\mathfrak{K}_0$. Weil schließlich P_1 im Laufe dieses Prozesses nicht über A hinausrückt und jedenfalls am Schlusse innerhalb $\mathfrak{T}$ sich befindet, liegt $\mathfrak{K}'$ auch bezüglich $\mathfrak{T}$ gleichartig mit $\mathfrak{K}_0$. Daraus folgt die Behauptung.

Den eben gemachten Feststellungen zufolge erhalten wir somit aus jedem der betrachteten Kreise $\mathfrak{K}_0$ vom Typus A einen *Kreis vom Typus B*, dessen *Tangente in* P_0 *der Träger der oberen Halbtangente in* P_0 *an* $\mathfrak{T}$ *ist, welcher die in der Zusammenfassung von Nr.* **3**, 3 *angegebenen Eigenschaften* 1), 2), 3), 4) *besitzt und wobei* P_0 *eine Ecke auf* $\mathfrak{T}$

[18]) Falls Punkte von $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ *unter*halb P_1 gewonnen werden, soll, wie schon früher, stets der unterste Schnittpunkt aus $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ im weiteren Verlaufe des Prozesses an Stelle von P_1 treten und auch mit P_1 bezeichnet werden (vgl. Nr. **3**, 2).

(vgl. Nr. **3**, 4., Bemerkung) *ist*. Ob P_0 Stützpunkt dieses Kreises auf $\mathfrak{T}$ ist oder nicht, bleibt für das Folgende ohne Belang.

4, 3. Zufolge Nr. **3**, 3 zusammen mit dem soeben (am Schlusse von Nr. **4**, 2) Festgestellten genügt es, von jetzt ab nur folgende beiden Fälle zu betrachten:

Differenzierbarer Fall. Es ist P_0 differenzierbarer Punkt auf $\mathfrak{T}$ und es gibt eine, den Bogen $\mathfrak{T}$ in P_0 stützenden Kreis $\mathfrak{K}(P_0)$ (vom Typus B) mit den Eigenschaften 1) bis 5) der Nr. **3**, 3.

Nicht-differenzierbarer Fall. Es ist P_0 eine Ecke auf $\mathfrak{T}$ und es gibt einen Kreis $\mathfrak{K}_0^*$ vom Typus B mit den Eigenschaften 1), 2), 3) und 4) der Nr. **3**, 3. Je nachdem die Tangente von $\mathfrak{K}_0^*$ in P_0 Träger der *oberen* oder *unteren Halbtangente in* P_0 an $\mathfrak{T}$ ist, sprechen wir vom *(nicht-differenzierbaren) Unterfall* **a** oder **b**. Da der Unterfall **b** bei der Zurückführung des Typus A auf Typus B niemals auftritt, so können wir überdies annehmen: *Im Unterfall* **b** *ist* P_0 *Stützpunkt von* $\mathfrak{K}_0^*$ *auf* $\mathfrak{B}$ (und es besitzt $\mathfrak{K}_0^*$ auch noch die Eigenschaften 3 a) und 5) der *Nr.* **3**, 3.)

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir *in beiden Unterfällen den Bogen* $\mathfrak{T}$ *als eckendicht annehmen.*

§ 5. Konstruktion eines normierten Kreissystems im nicht-differenzierbaren Fall.

5, 1. Wir betrachten zunächst [19]) den *nicht-differenzierbaren Unterfall* **a** (vgl. Nr. **4**, 3).

Wir wählen im Kreisraume eine Nachbarschaft $\mathfrak{N}_0$ von $\mathfrak{K}_0^*$ so klein *erstens*, daß für *alle Kreise* $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{N}_0$ die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0^*$ mit $\mathfrak{T}$ erhalten und gleichmäßig *beliebig scharf* getrennt bleiben (vgl. Nr. **1**, 22); und *zweitens*, daß alle Kreise aus $\mathfrak{N}_0$ gleichartig *bezüglich* $\mathfrak{T}$ liegen und zwar gleichartig mit $\mathfrak{K}_0^*$ (vgl. Nr. **1**, 25).

Wegen der *einseitigen Stetigkeit der oberen Halbtangenten* an $\mathfrak{T}$ in den Punkten von $\mathfrak{T}$ sowie wegen der stetigen Abhängigkeit des Kreises von Berührpunkt und Tangente gibt es zu jeder solchen $\mathfrak{N}_0$ eine *obere Umgebung* $\mathfrak{U}_0$ von P_0 auf $\mathfrak{T}'$ von folgender Beschaffenheit: Zu *jedem* Punkt P von $\mathfrak{U}_0$ gehört eine in $\mathfrak{N}_0$ enthaltene Menge $\mathfrak{M}(P)$ von Kreisen, deren Tangente $\mathfrak{t}(P)$ in P Träger der *oberen* Halbtangente an $\mathfrak{T}$ in P ist. Wir wählen $\mathfrak{M}(P)$ als größte derartige in $\mathfrak{N}_0$ enthaltene Menge. P heiße der zu den Kreisen $\mathfrak{M}(P)$ gehörige **Berührpunkt.**

Die *über alle* P *aus* $\mathfrak{U}_0$ *erstreckte Summe* der $\mathfrak{M}(P)$ sei *mit* $\mathfrak{G}$ *bezeichnet*. $\mathfrak{G}$ ist sicherlich im *Kreisraume* in sich dicht; denn jeder Kreis aus $\mathfrak{N}_0$ mit dem Berührpunkt P und der Tangente $\mathfrak{t}(P)$ ist Limes von Kreisen aus $\mathfrak{N}_0$ mit dem gleichen Berührpunkt P und der gleichen Tangente $\mathfrak{t}(P)$. Es gilt aber noch mehr: Ist $\mathfrak{K}$ ein Kreis aus $\mathfrak{G}$ mit dem Berührpunkt P und bezeichnet $\mathfrak{G}'(\mathfrak{K})$ eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$, so gibt es zu $\mathfrak{G}'(\mathfrak{K})$ eine *obere Umgebung* $\mathfrak{U}'$ *von* P *auf* $\mathfrak{T}$ derart, daß zu *jedem* Punkt P' aus $\mathfrak{U}'$ (mindestens) ein Kreis in $\mathfrak{G}'(\mathfrak{K})$ existiert, welcher P' als Berührpunkt besitzt. Diese Eigenschaft von $\mathfrak{G}$ folgt wieder aus der einseitigen Stetigkeit der (oberen) Halbtangente an $\mathfrak{T}$ und soll kurz als **obere Insichdichtheit von** $\mathfrak{G}$ (bezüglich $\mathfrak{T}$) bezeichnet werden; $\mathfrak{G}$ heißt dann auch **insichdicht von oben.**

5, 2. Um mit Hilfe von $\mathfrak{K}_0^*$ ein normiertes Kreissystem zu gewinnen, haben wir jetzt aus $\mathfrak{U}_0$ (vgl. oben Nr. **5**, 1) einen *abgeschlossenen* Teilbogen $\mathfrak{T}^*$ und aus $\mathfrak{G}$ eine Menge $\mathfrak{G}^*$ von Kreisen $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(P)$ herauszugreifen, welche den folgenden *Forderungen* genügt (vgl. dazu I., Nr. **3**, 1):

I′) Jedem Punkte P von $\mathfrak{T}^*$ ist ein Kreis $\mathfrak{K}(P)$ aus $\mathfrak{G}^*$ zugeordnet, welcher durch P geht und dort den Träger der oberen Halbtangente in P an $\mathfrak{T}$ als Tangente besitzt.

II′) Alle $\mathfrak{K}(P)$ aus $\mathfrak{G}^*$ besitzen unterhalb P mindestens zwei Schnittpunkte mit dem (offenen) Teilbogen $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{B}$.

---

[19]) Der Unterfall **b** wird in Nr. **5**, 5 behandelt.

III′) Von diesen Schnittpunkten von $\mathfrak{K}(P)$ mit $\mathfrak{T}$ unterhalb P, liegt mindestens einer in dem (vorgegebenen offenen) Teilbogen $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$.

IV′) Alle $\mathfrak{K}(P)$ aus $\mathfrak{G}^*$ liegen gleichartig bezüglich $\mathfrak{T}$ *und* P, übrigens sogar gleichartig mit $\mathfrak{K}_0^*$ bezüglich $\mathfrak{T}$. Insbesondere ist also die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}(P)$ mit $\mathfrak{T}$ unterhalb P gerade.

V′) Die unterhalb P gelegenen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}(P)$ mit $\mathfrak{T}$ liegen sämtlich außerhalb eines festen offenen Teilbogens $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{T}'$, wobei die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{T}'$ enthalten und $\mathfrak{T}^*$ Teilbogen von $\mathfrak{Z}$ ist. Dabei soll also $\mathfrak{Z}$ der gleiche Bogen sein für *alle* P bzw. $\mathfrak{K}(P)$.

VI′) Es gibt einen festen Teilbogen $\mathfrak{Q}$ von $(\mathfrak{T} - \mathfrak{Z})$, welcher für *alle* P bzw. $\mathfrak{K}(P)$ *zwischen* den beiden unterhalb P und am nächsten bei P gelegenen Schnittpunkten von $\mathfrak{K}(P)$ mit $\mathfrak{T}$ liegt.

Die beiden Forderungen V′ und VI′ sind gewiß erfüllt, wenn man $\mathfrak{T}^*$ bzw. $\mathfrak{G}^*$ entsprechend der folgenden *schärferen Forderung* gewählt hat:

VII′) Sämtliche Kreise $\mathfrak{K}(P)$ aus $\mathfrak{G}^*$ sollen die gleiche Anzahl, etwa p, von Schnittpunkten unterhalb P mit $\mathfrak{T}$ besitzen und diese Schnittpunkte sollen in $\mathfrak{G}^*$ untereinander und von $\mathfrak{T}^*$ **gleichmäßig scharf getrennt** sein, d. h.: Sind $S_1(P), \ldots, S_p(P)$ die auf $\mathfrak{K}(P)$ unterhalb P gelegenen Schnittpunkte aus $\mathfrak{K}(P) \frown \mathfrak{T}$, im Sinne der Orientierung von $\mathfrak{B}$ gezählt (also $S_\mu(P)$ unterhalb $S_\nu(P)$ für $\mu < \nu$; $\mu, \nu = 1, \ldots, p$), so soll $S_\nu(P)$ für *alle* P aus $\mathfrak{T}^*$ in einem abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{A}_\nu$ liegen; dabei sollen $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{A}_\nu$ fremd sein für $\mu \neq \nu$, ferner soll jedes $\mathfrak{A}_\nu$ fremd sein zu $\mathfrak{T}^*$.

Wir werden im folgenden immer auf die Erfüllung der Forderungen I′—IV′ und VII′ ausgehen.

Im vorliegenden nicht-differenzierbaren Falle werden wir ferner Kreise $\mathfrak{K}(P)$ der gewünschten Beschaffenheit *zunächst nur für die*, auf $\mathfrak{T}$ dicht liegenden, *Ecken* konstruieren und *sodann* das so erhaltene System von Kreisen zu einem normierten System *für alle Punkte* von $\mathfrak{T}^*$ *vervollständigen*.

5, 3. Zur Gewinnung des soeben (Nr. **5**, 2) definierten $\mathfrak{G}^*$ bezeichnen wir die Gesamtheit derjenigen Kreise aus $\mathfrak{G}$, deren Berührungspunkte in Ecken von $\mathfrak{U}_0$ fallen, mit $\mathfrak{G}_e$. Diese Teilmenge $\mathfrak{G}_e$ ist ebenfalls in sich dicht und insbesondere in sich dicht von oben (bezüglich der Ecken von $\mathfrak{T}$) (vgl. Nr. **5**, 1); dies folgt aus der Eckendichtheit von $\mathfrak{U}_0$ und aus der einseitigen Stetigkeit der oberen Halbtangenten in der Menge der Ecken von $\mathfrak{U}_0$.

Jetzt bemerken wir, daß alle Kreise aus $\mathfrak{G}_e$ jedenfalls den Forderungen I′—IV′ genügen, sobald nur $\mathfrak{N}_0$ bzw. $\mathfrak{U}_0$ hinreichend klein gewählt ist. Für I′—III′ folgt das aus der Konstruktion von $\mathfrak{G}_e$.

Daß die Forderung IV′ erfüllt ist, ergibt sich wegen der entsprechenden Eigenschaft von $\mathfrak{K}(P_0)$ (vgl. Nr. **3**. 3., Zusammenfassung, 1.) aus der nachstehenden

Bemerkung: Wenn ein Kreis $\mathfrak{K}$ in der Ecke P des Konvexbogens $\mathfrak{T}$ den Träger $\mathfrak{t}$ der oberen Halbtangente $\mathfrak{h}^+$ in P an $\mathfrak{T}$ als Tangente besitzt, dann verläuft eine *untere* Umgebung von P auf $\mathfrak{K}$ ganz auf der konvexen Seite von $\mathfrak{T}$. (Dabei soll $\mathfrak{K} \frown \mathfrak{T}$ mindestens drei Punkte enthalten, ferner sei die Orientierung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{T}$ entsprechend I., Nr. **2**, 3 festgesetzt.)

Beweis. Da P eine Ecke sein soll, so verläuft die zu $\mathfrak{h}^+$ komplementäre, von P ausgehende Halbgerade $\underline{\mathfrak{h}}^+$ ganz auf der konvexen Seite von $\mathfrak{T}$, d. h. im Äußern von $\overline{\mathfrak{B}}$ (vgl. I., Nr. **2**, 3). Da $\mathfrak{K}$ in P auch $\underline{\mathfrak{h}}^+$ als Halbtangente besitzt, so verläuft eine einseitige Umgebung $\mathfrak{V}$ von P auf $\mathfrak{K}$ ebenfalls im Äußeren von $\overline{\mathfrak{B}}$; und zwar ist jede hinreichend kleine $\mathfrak{V}$ enthalten in einem, $\underline{\mathfrak{h}}^+$ enthaltenden, P als Scheitel besitzenden, ganz im Äußern von $\overline{\mathfrak{B}}$

gelegenen Winkelraum (beliebig kleiner Öffnung). Projizieren wir nun eine Umgebung von P auf der Halbgeraden $\underline{\mathfrak{h}}^+$ von einem im Innern von $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkte Q auf $\mathfrak{B}$, so erhalten wir eine untere Umgebung $\mathfrak{W}$ von P auf $\mathfrak{T}$; und auf $\mathfrak{W}$ projiziert sich gleichzeitig $\mathfrak{V}$. Daher ist $\mathfrak{V}$ untere Umgebung von P auf $\mathfrak{K}$ (vgl. I., Nr. **2**, 3). (Wenn die einseitige Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P_0 nur hinreichend klein ist, so sind übrigens die Eckenwinkel sämtlich beliebig nahe an π gelegen.)

Bisher waren *alle* Kreise aus $\mathfrak{G}_e$ in Betracht gezogen worden. Um auch die Forderung VII′ zu erfüllen, wenden wir den Satz von Nr. **1**, 23 auf $\mathfrak{G}_e$ an; dies ist erlaubt, da $\mathfrak{G}_e$ allen Voraussetzungen dieses Satzes genügt. Dem zitierten Satze gemäß gibt es in beliebiger zu $\mathfrak{G}_e$ gehöriger Umgebung eines jeden Kreises $\mathfrak{K}_0$ aus $\mathfrak{G}_e$ einen Kreis $\mathfrak{K}_0'$ (aus $\mathfrak{G}_e$) mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Umgebung $\mathfrak{G}_0'$ von $\mathfrak{K}_0'$ auf $\mathfrak{G}_e$, so daß *jeder* Kreis $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{G}_0'$ die *gleiche* Anzahl Schnittpunkte mit $\mathfrak{T}$ unterhalb des zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Berührungspunktes P besitzt, wie sie $\mathfrak{K}_0'$ unterhalb seines Berührpunktes P_0' besitzt. Durch genügend kleine Wahl von $\mathfrak{G}_0'$ kann erreicht werden, daß besagte Schnittpunkte innerhalb $\mathfrak{G}_0'$ gleichmäßig beliebig scharf von einander und von den Berührpunkten der in Frage kommenden Kreise getrennt liegen (Nr. **1**, 22). Da nun $\mathfrak{G}_e$, also auch $\mathfrak{G}_0'$, in sich dicht von oben ist, so gibt es eine obere Umgebung $\mathfrak{U}_0'$ auf $\mathfrak{T}$ des (zu $\mathfrak{K}_0'$ gehörigen Berührpunktes) P_0' derart, daß zu *jeder* Ecke E von $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{U}_0'$ Kreise aus $\mathfrak{G}_0'$ existieren, welchen besagte Ecke E als Berührpunkt zugehört. Übrigens kann von $\mathfrak{K}_0'$ noch verlangt werden, daß P_0' beliebig nahe beim Berührpunkt P_0 von $\mathfrak{K}_0$ liegt; wir brauchen ja nur $\mathfrak{U}_0$ (vgl. Nr. **5**, 1) von vorn herein hinreichend klein zu wählen. Fixieren wir also $\mathfrak{N}_0$ (vgl. Nr. **5**, 1) hinreichend klein, P_0' hinreichend nahe bei P_0, ferner $\mathfrak{G}_0'$ und $\mathfrak{U}_0'$ hinreichend klein und wählen wir für jede zu $\mathfrak{U}_0'$ gehörige Ecke E willkürlich aus $\mathfrak{G}_0'$ einen Kreis $\mathfrak{K}(E)$ mit E als Berührpunkt aus, so hat die Menge der den Ecken E von $\mathfrak{U}_0'$ auf diese Weise eindeutig zugeordneten Kreise $\mathfrak{K}(E)$ folgende Eigenschaften:

Der unterhalb E *am nächsten* bei E gelegene Schnittpunkt $P_q = P_q(E)$ von $\mathfrak{K}(E)$ mit $\mathfrak{T}$ liegt für alle E sicher in $\mathfrak{T}'$ (wegen der Wahl von $\mathfrak{N}_0$, vgl. Nr. **5**, 1, Anfang), aber nicht in $\mathfrak{U}_0'$. Das Letztere folgt daraus, daß bei hinreichend kleinem $\mathfrak{G}_0'$ die unterhalb des jeweiligen Berührungspunktes gelegenen Schnittpunkte der $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{G}_0'$ mit $\mathfrak{T}$ gleichmäßig beliebig scharf getrennt sind (vgl. oben), mithin so scharf getrennt, daß $P_q(E)$ für alle E auf einen zu $\mathfrak{U}_0'$ fremden Bogen beschränkt ist. Aus dem eben Gesagten folgt sogar: Bei hinreichend kleinem $\mathfrak{G}_0'$ gibt es einen zur abgeschlossenen Hülle von $\mathfrak{U}_0'$ fremden abgeschlossenen Teilbogen $\mathfrak{A}_q$, welcher $P_q(E)$, aber keinen weiteren Schnittpunkt aus $\mathfrak{K}(E) \frown \mathfrak{T}$ enthält; und zwar kann $\mathfrak{A}_q$ als von E unabhängig gewählt werden; im übrigen liegen die Schnittpunkte der $\mathfrak{K}(E)$ mit $\mathfrak{T}$ unterhalb E untereinander und von einem, alle E enthaltenden Teilbogen $\mathfrak{U}_0'$ gleichmäßig (sogar beliebig) scharf getrennt. Die von uns den Ecken E aus $\mathfrak{U}_0'$ zugeordneten Kreise $\mathfrak{K}(E)$ bilden also tatsächlich eine der Forderung VII′ genügende Teilmenge $\tilde{\mathfrak{G}}_e$ von $\mathfrak{G}_e$. Da $\mathfrak{G}_e$ bereits die Forderungen I′—IV′ erfüllt, gelten diese auch für $\tilde{\mathfrak{G}}_e$. Daher hat $\tilde{\mathfrak{G}}_e$ alle von $\mathfrak{G}^*$ geforderten Eigenschaften, wenigstens soweit die *Ecken* E von $\mathfrak{U}_0'$ in Betracht kommen. Im folgenden schreiben wir $\mathfrak{T}^*$ statt $\mathfrak{U}_0'$ und $\mathfrak{G}_e^*$ statt $\tilde{\mathfrak{G}}_e$ und zeigen, daß sich aus $\mathfrak{G}_e^*$ durch einen einfachen Vervollständigungsprozeß das gesuchte $\mathfrak{G}^*$ gewinnen läßt.

5, 4. Um $\mathfrak{G}^*$ zu gewinnen, haben wir jedem der, auf $\mathfrak{T}^*$ dicht liegenden, *differenzierbaren* Punkte D von $\mathfrak{T}^*$ einen ebenfalls den (in Nr. **5**, 2 genannten) Forderungen I′—IV′ und VII′ genügenden Kreis zuzuweisen, dessen Tangente in D die obere Halbtangente an $\mathfrak{T}$ in D enthält. Dies erreichen wir durch Limesbildung. Es sei nämlich D ein differenzierbarer Punkt von $\mathfrak{T}^*$. Da nach Voraussetzung die Ecken dicht liegen auf $\mathfrak{T}^*$, so ist D Limes einer auf $\mathfrak{B}$ monoton absteigenden Folge von Ecken E_ν auf $\mathfrak{T}^*$. Die zu den E_ν

gehörigen Kreise $\mathfrak{K}(E_\nu)$ aus $\mathfrak{G}_\varepsilon^*$ bilden eine im Kreisraum bedingt kompakte[20]) Menge. Daher existiert eine Teilfolge $\{E'_\varrho\}$ von $\{E_\nu\}$ und eine Folge $\{\mathfrak{K}(E'_\varrho)\}$ zugehöriger Kreise aus $\mathfrak{G}_\varepsilon^*$, so daß $\{\mathfrak{K}(E'_\varrho)\}$ gleichmäßig gegen einen Kreis $\mathfrak{K}(D)$ konvergiert, welcher durch D geht. Da die oberen Halbtangenten in den E'_ϱ gegen die obere Halbtangente in D konvergieren, also ihre Trägergeraden gegen die Tangente in D an $\mathfrak{T}^*$, so besitzt $\mathfrak{K}(D)$ diese Tangente an $\mathfrak{T}^*$ selbst als Tangente; damit ist I′ erfüllt. Da weiter jeder Kreis $\mathfrak{K}(E'_\varrho)$ die gleiche Zahl von Schnittpunkten mit $\mathfrak{T}$ unterhalb $\mathfrak{T}^*$ besitzt, und da diese Schnittpunkte untereinander und von $\mathfrak{T}^*$ gleichmäßig scharf getrennt sind (im Sinne von Nr. **5**, 2; VII′), so ist auch die Anzahl der *Schnitt*punkte von $\mathfrak{K}(D)$ unterhalb E die gleiche; es treten höchstens nur noch Stützpunkte (irgendwo auf $\mathfrak{T}$) hinzu. Es sind also insbesondere auch für $\mathfrak{K}(D)$ die Forderung II′, III′, VII′ erfüllt. Da schließlich alle $\mathfrak{K}(E'_\varrho)$ gleichartig bezüglich $\mathfrak{T}$ und E'_ϱ liegen, so folgt durch Grenzübergang ein Gleiches auch für $\mathfrak{K}(D)$ bezüglich $\mathfrak{T}$ und D. In der Tat: Es sei D' der am nächsten unterhalb von D auf $\mathfrak{K}(D)$ gelegene Punkt aus $\mathfrak{K}(D) \frown \mathfrak{T}$. Sicher liegt D' auf $\mathfrak{T}$ nicht unterhalb des Limes der P_q (vgl. Nr. **5**, 3). Zufolge Nr. **1**, 21 ist jeder auf $\mathfrak{K}(D)$ zwischen D' und D gelegene, von D' und D verschiedene, Punkt X Häufungspunkt von Punkten X_ϱ, wobei X_ϱ auf $\mathfrak{K}(E'_\varrho)$ zwischen E'_ϱ und $P_q(E'_\varrho)$ liegt. Da die X_ϱ sämtlich auf der gleichen Seite s von $\mathfrak{T}$ liegen, so liegt X, da nicht zu $\mathfrak{T}$ gehörig, ebenfalls auf der Seite s von $\mathfrak{T}$. Daraus folgt die Behauptung. Es wird also auch IV′ von $\mathfrak{K}(D)$ befriedigt, womit alles bewiesen ist.

5, 5. Nunmehr betrachten wir den nicht-differenzierbaren Unterfall **b** (vgl. Nr. **4**, 3). In diesem Unterfall wählen wir $\mathfrak{N}_0$ wie früher, nehmen aber jetzt $\mathfrak{U}_0$ als *untere* Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{T}$, und zwar als Teilbogen von $\mathfrak{T}'$. Es existiert dann eine derartige $\mathfrak{U}_0$ von *der* Eigenschaft, daß durch jeden Punkt P von $\mathfrak{U}_0$ eine Menge $\mathfrak{M}(P)$ von Kreisen aus $\mathfrak{N}_0$ geht, deren Tangenten in P Träger der *oberen* Halbtangenten in P an $\mathfrak{T}$ sind; die Existenz von $\mathfrak{M}(P)$ folgt aus der Eigenschaft des Konvexbogens $\mathfrak{T}$, daß die Träger der *oberen* Halbtangenten an $\mathfrak{T}$ in den Punkten P gegen den Träger der *unteren* Halbtangente in P_0 an $\mathfrak{T}$ konvergieren, falls die P *von unten her* gegen P_0 streben. Nun war P_0 als Ecke von $\mathfrak{T}$ angenommen, und ferner soll die Tangente in P_0 an $\mathfrak{K}_0^*$ Träger der unteren Halbtangente in P_0 an $\mathfrak{T}$ sein. Daher verläuft mindestens eine einseitige Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_0^*$ ganz auf der konvexen Seite s von $\mathfrak{T}$. Da P_0 im Unterfalle **b** auch Stützpunkt von $\mathfrak{K}_0^*$ auf $\mathfrak{T}$ ist, so verläuft sogar eine beiderseitige, insbesondere also eine untere Umgebung von P auf $\mathfrak{K}_0^*$ ganz auf der Seite s. Es sei nun E eine, unterhalb P_0 gelegene Ecke von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{K}(E)$ ein in $\mathfrak{N}_0$ gelegener Kreis, welcher den Träger der oberen Halbtangente an $\mathfrak{T}$ in E als Tangente in E besitzt. Bei hinreichend kleiner Wahl von $\mathfrak{N}_0$ und passender Wahl von E liegen dann unterhalb E auf $\mathfrak{T}$ noch mindestens zwei Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}(E)$, davon mindestens einer in $\mathfrak{T}'$, und es liegt $\mathfrak{K}(E)$ gleichartig mit $\mathfrak{K}_0^*$ bezüglich $\mathfrak{T}$. Weiter liegt (vgl. Nr. **5**, 3) eine untere Umgebung von E auf $\mathfrak{K}(E)$ auf der Seite s von $\mathfrak{T}$, so daß $\mathfrak{K}(E)$ auch gleichartig bezüglich $\mathfrak{T}$ und E liegt. Somit besitzt $\mathfrak{K}(E)$ die in Nr. **3**, 3 angegebenen Eigenschaften 1), 2), 3), 4), welche es uns in Nr. **5**, 1 ff. ermöglichten, aus $\mathfrak{K}_0^* = \mathfrak{K}_0^*(P_0)$ ein normiertes Kreissystem bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ zu gewinnen. Wir brauchen also in den Überlegungen der Nr. **5**, 1 ff. nur $\mathfrak{K}(E)$ an Stelle von $\mathfrak{K}_0^*$ treten zu lassen, um auch für den in gegenwärtiger Nummer zu betrachtenden Fall ein normiertes Kreissystem zu konstruieren.

Damit ist der nicht-differenzierbare Fall vollständig erledigt.

§ 6. Außergewöhnlicher differenzierbarer Fall.

6, 1. Nach Erledigung des nicht-differenzierbaren Falles ist noch der *differenzierbare* Fall zu behandeln. Es sei also P_0 differenzierbarer Punkt von $\mathfrak{B}$ und es sei $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(P_0)$

[20]) Vgl. Hausdorff, a. a. O.[3]), S. 107. Unser Kreisraum ist hier entsprechend metrisiert gedacht.

ein Kreis mit den Eigenschaften 1)—5) (vgl. Nr. **3**, 3). Die Konstruktion eines normierten Kreissystems bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ müssen wir jetzt in etwas anderer Art durchführen als im nicht-differenzierbaren Falle. Zunächst werden wir unterscheiden zwischen einem a u ß e r g e w ö h n l i c h e n Fall und einem g e w ö h n l i c h e n (bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$). Der erstere liegt vor, wenn auf $\mathfrak{T}$ zwischen P_q und P_k, abgesehen von P_0, noch weitere Verlustst\"utzpunkte mit $\mathfrak{K}_0$ (bezüglich des ersten monotonen Prozesses) vorhanden sind, während wir den gewöhnlichen Fall haben, sobald P_0 der einzige Verlustst\"utzpunkt ist. Zunächst (Nr. **6**, 2) soll der *außergewöhnliche* Fall behandelt und es soll gezeigt werden, daß er immer entweder auf einen nicht-differenzierbaren oder auf einen gewöhnlichen differenzierbaren Fall zurückgeführt werden kann.

6, 2. Es liege also ein *außergewöhnlicher differenzierbarer Fall* vor, d. h. es seien auf $\mathfrak{T}$ zwischen P_q und P_k außer P_0 noch andere Verlustst\"utzpunkte mit $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(P_0)$ bezüglich des ersten monotonen Prozesses (welcher zu $\mathfrak{K}_0$ führte) vorhanden. Diese Stützpunkte liegen *sämtlich gleichartig* mit P_0 bezüglich $\mathfrak{T}$ (vgl. Nr. **3**, 3). Wir nehmen nun zunächst folgenden, beliebig klein wählbaren, **zweiten Reduktionsprozeß** vor: Wir halten P_0 und in ihm die Kreistangente fest und ändern $\mathfrak{K}_0$ so ab, daß einer und folglich jeder der von P_0 verschiedenen Verlustst\"utzpunkte zwischen P_q und P_k sich in je eine gerade Anzahl Schnittpunkte auflöst (vgl. dazu die Behauptung α des Tangentenmonotoniesatzes (Nr. **1**, 41)). Bei diesem Reduktionsprozeß verwandeln sich P_q und P_k jeder in eine ungerade Anzahl Schnittpunkte. Es entsteht also ein neuer Kreis $\mathfrak{K}^*$, welcher zu $\mathfrak{K}_0$ beliebig benachbart und so gewählt werden kann, daß, abgesehen höchstens von P_0, *alle Punkte aus* $\mathfrak{K}^* \frown \mathfrak{T}$ *Schnittpunkte* sind (vgl. Nr. **1**, 57), daß alle Schnittpunkte bzw. Verlustst\"utzpunkte aus $\mathfrak{K}_0 \frown \mathfrak{T}$ beim Übergang zu $\mathfrak{K}^*$ erhalten bzw. aufgelöst sind und beliebig scharf getrennt bleiben. Es bezeichne P_r^* den untersten bzw. P_v^* den obersten derjenigen Punkte aus $\mathfrak{K}^* \frown \mathfrak{T}$, welcher aus P_q bzw. P_k beim Übergang zu $\mathfrak{K}^*$ entsteht. $\mathfrak{K}^*$ hat in P_0 mit $\mathfrak{B}$ die Tangente gemeinsam und besitzt, wenn P_0 auf $\mathfrak{K}^*$ für 2 Schnittpunkte gezählt wird, zwischen P_r^* und P_v^* mindestens die gleiche Anzahl Schnittpunkte, wie der Kreis während des ersten monotonen Prozesses unmittelbar vor Erreichung von $\mathfrak{K}_0$.

Hinsichtlich der Lage des Kreises $\mathfrak{K}^*$ zu $\mathfrak{T}$ in P_0 bestehen folgende drei Möglichkeiten:

1. P_0 ist auch auf $\mathfrak{K}^*$ Stützpunkt mit $\mathfrak{T}$, und zwar ein zu P_0 auf $\mathfrak{K}_0$ bezüglich $\mathfrak{T}$ gleichartig gelegener. Dann haben wir für $\mathfrak{K}^*$ und P_0 den *gewöhnlichen* differenzierbaren Fall (bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$) vor uns, welcher später (§ 7) erledigt wird.

2. P_0 ist Stützpunkt von $\mathfrak{K}^*$ auf $\mathfrak{T}$, und zwar ein zu P_0 auf $\mathfrak{K}_0$ *nicht* gleichartig bezüglich $\mathfrak{T}$ gelegener. Wir bezeichnen diese Möglichkeit als **Stützfall.**

3. P_0 ist Schnittpunkt von $\mathfrak{K}^*$ mit $\mathfrak{T}$. Wir sprechen dann kurz vom **Schnittfall.**

6, 3. Wir untersuchen zunächst den *Schnittfall.* Demgemäß haben wir einen Kreis $\mathfrak{K}^*$ zu betrachten, welcher durch den Punkt P_0 von $\mathfrak{T}$ geht, dessen Tangente in P_0 mit der Tangente an $\mathfrak{T}$ in P_0 identisch ist und welcher außerdem in P_0 mit $\mathfrak{T}$ einen Schnittpunkt besitzt. Da $\mathfrak{K}^*$ in beliebiger Nachbarschaft des ursprünglichen Kreises $\mathfrak{K}_0$ angenommen werden kann, und da $\mathfrak{K}_0$ den Bogen $\mathfrak{T}$ in P_0 stützt, so kann $\mathfrak{K}^*$ so gewählt werden, daß in einer beliebig kleinen Umgebung von P_0, abgesehen vom Schnittpunkte P_0, noch eine ungerade Anzahl Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{T}$ liegen. Halten wir jetzt P_0 fest und lassen den Kreis $\mathfrak{K}^*$ (mit seiner Tangente) sich hinreichend wenig und in geeigneter Richtung um P_0 drehen, so müssen wir einen Kreis $\mathfrak{K}'$ mit P_0 als *Schnitt*punkt erhalten, welcher in beliebig kleiner Umgebung von P_0 außer P_0 noch mindestens drei untereinander verschiedene Schnittpunkte mit $\mathfrak{T}$ trägt; insgesamt liegen in besagter Umgebung von P_0 eine gerade Anzahl, und zwar mindestens vier, Schnittpunkte von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{T}$. Im übrigen können wir die Drehung beliebig klein, also insbesondere derart wählen, daß die von P_0

verschiedenen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{T}$ sämtlich erhalten und beliebig scharf getrennt bleiben, getrennt auch von den soeben aus P_0 gewonnenen (mindestens vier) Schnittpunkten. Der (zweite) Reduktionsprozeß in Nr. **6**, 2 zusammen mit dem soeben (Nr. **6**, 3) beschriebenen Prozesse, durch welche wir aus $\mathfrak{K}_0$ den neuen $\mathfrak{K}'$ gewonnen haben, ist mithin ein, beliebig klein wählbarer, *Zwischenprozeß* im Sinne von Nr. **1**, 56. Seine Wirkung ist — um es zu wiederholen — unter anderem diese: In beliebig vorgeschriebener Umgebung der zu $\mathfrak{K}_0$ gehörigen Punkte P_q bzw. P_k liegen Schnittpunkte P'_r bzw. P'_v derart, daß eine untere Umgebung von P'_r bzw. P'_v auf $\mathfrak{K}'$ auf der nämlichen Seite von $\mathfrak{T}$ liegt, wie eine untere Umgebung von P_q bzw. von P_k auf $\mathfrak{K}_0$; ferner ist die Anzahl der Schnittpunkte aus $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}'$ zwischen P'_r und P'_v um mindestens zwei größer als die der Schnittpunkte aus $\mathfrak{T} \frown \mathfrak{K}_0$ zwischen P_q und P_k, wenn der auf $\mathfrak{K}_0$ liegende Stützpunkt P_0 für zwei Schnittpunkte gerechnet wird. Schließlich liegt $\mathfrak{K}'$ bezüglich $\mathfrak{T}$ gleichartig mit $\mathfrak{K}_0$ bezüglich $\mathfrak{T}$.

6, 4. Entsprechend wie soeben den Schnittfall, behandeln wir jetzt den *Stützfall*. Wir geben nämlich einen Zwischenprozeß an, durch welchen $\mathfrak{K}_0$ in einen von genau der gleichen Art wie $\mathfrak{K}'$ in Nr. **6**, 3 übergeführt, insbesondere also die Anzahl der Schnittpunkte zwischen P_q und P_k vergrößert wird. Im Stützfalle haben wir einen, zu $\mathfrak{K}_0$ beliebig benachbarten Kreis $\mathfrak{K}^*$ durch P_0, welcher in P_0 die gleiche Tangente besitzt wie $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{T}$. Während aber $\mathfrak{K}_0$ den Bogen $\mathfrak{T}$ in P_0 auf der einen Seite stützt (d. h. in der Umgebung von P_0 ganz auf der einen Seite von $\mathfrak{T}$ verläuft), wird $\mathfrak{T}$ in P_0 von $\mathfrak{K}^*$ auf der *anderen* Seite gestützt. Da $\mathfrak{K}^*$ zu $\mathfrak{K}_0$ beliebig benachbart ist, kann angenommen werden, daß in einer vorgegebenen Umgebung von P_0 eine gerade Anzahl, und zwar mindestens zwei, Schnittpunkte von $\mathfrak{K}^*$ mit $\mathfrak{T}$ liegen (abgesehen vom Stützpunkt P_0). Wir können jetzt den Stützpunkt P_0 auf $\mathfrak{K}^*$ in mindestens zwei Schnittpunkte auflösen, indem wir (wie im Schnittfalle (vgl. Nr. **6**, 3)) den Kreis $\mathfrak{K}^*$ um P_0 (in beliebiger Richtung) beliebig wenig drehen. Damit haben wir dann in beliebiger Umgebung von P_0 wieder mindestens vier Schnittpunkte des neuen Kreises $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{T}$. Die weiteren Überlegungen verlaufen nun genau so wie im Schnittfalle (Nr. **6**, 3); wir kommen also, wie oben behauptet, auch im Stützfalle unter Zuhilfenahme eines beliebig kleinen Zwischenprozesses immer zu einem Kreise $\mathfrak{K}'$.

6, 5. Die Betrachtungen von Nr. **6**, 2—**6**, 4 lehren: Gelangt man von dem Ausgangskreis $\mathfrak{K}$ (für $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{T}'$) durch den ersten monotonen Prozeß $\boldsymbol{M_1}$ zu einem Kreise $\mathfrak{K}_0$ des außergewöhnlichen differenzierbaren Falles bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$, so kann durch einen beliebig klein wählbaren Zwischenprozeß entweder (I.) der gewöhnliche differenzierbare Fall hergestellt, oder aber (II.) ein Quasi-Ausgangskreis $\mathfrak{K}'$ bezüglich $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ (vgl. Nr. **2**, 3) gewonnen werden, welcher zwischen P'_r und P'_v mehr Schnittpunkte besitzt als der ursprüngliche Ausgangs- bzw. Quasi-Ausgangskreis zwischen P_q und P_k; *mit P'_v bzw. P'_r wird dabei der oberste bzw. der unterste derjenigen* (in $\widetilde{\mathfrak{T}}$ gelegenen) *Schnittpunkte bezeichnet, in welchen P_k bzw. P_q beim Zwischenprozeß übergegangen ist* oder sich aufgespalten hat.

Liegt der II. Fall vor, so wenden wir auf $\mathfrak{K}'$ den ersten monotonen Prozeß an (vgl. Nr. **2**, 3), wobei P'_r und P'_v festgehalten werden; diesen Prozeß bezeichnen wir mit $\boldsymbol{M_2}$. Da P'_r und P'_v in $\widetilde{\mathfrak{T}}$ liegen, kann $\boldsymbol{M_2}$ wieder soweit getrieben werden, bis ein Fall III eintritt (vgl. Nr. **3**, 1—**3**, 4). Ist nun $\mathfrak{T}$ eckendicht und gelangt man überdies zu einem nichtdifferenzierbaren Fall (im Sinne von Nr. **4**, 3), so kann man gemäß § 5 ein normiertes Kreissystem bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ bereits konstruieren. Daher braucht nur wieder das Eintreten des differenzierbaren Falles in Betracht gezogen zu werden. Liegt der gewöhnliche differenzierbare Fall vor, so haben wir die in § 7 zu behandelnde Sachlage. Erscheint

dagegen ein außergewöhnlicher differenzierbarer Fall, so kann erneut ein beliebig kleiner Zwischenprozeß $\boldsymbol{Z_2}$ von der oben (Nr. **6**, 2—**6**, 4) angegebenen Art vorgenommen werden. Fortsetzung dieser Schlüsse zeigt, daß wir (bei hinreichend kleiner Wahl der Zwischenprozesse) nur dann weder jemals auf einen nicht-differenzierbaren noch jemals auf einen gewöhnlichen differenzierbaren Fall (bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$) treffen, wenn bei unserem Verfahren unbegrenzt oft und ausschließlich der außergewöhnliche differenzierbare Fall eintritt. Letzteres ist aber zufolge Nr. **1**, 56, Ziffer II, mit der Annahme unvereinbar, daß $\mathfrak{B}$ von (höchstens) endlicher zyklischer Ordnung sei.

6, 6. Das *Ergebnis* des gegenwärtigen Paragraphen 6 ist also: Von jedem außergewöhnlichen differenzierbaren Falle kann man stets mit Hilfe endlich vieler (geeigneter) beliebig kleiner Zwischenprozesse sowie Reduktions- und monotoner Prozesse zu einem nicht-differenzierbaren oder zu einem gewöhnlichen differenzierbaren Falle gelangen (bei den Zwischenprozessen wird die Anzahl der zwischen P_q und P_k gelegenen Schnittpunkte stets erhöht!). Insbesondere existiert also im außergewöhnlichen differenzierbaren Falle gewiß ein normiertes Kreissystem (bezüglich $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$), falls Gleiches für den (nicht-differenzierbaren und für den) gewöhnlichen differenzierbaren Fall gilt.

§ 7. Konstruktion eines normierten Kreissystems im gewöhnlichen differenzierbaren Falle.

7, 1. Wir haben in § 5 den nicht-differenzierbaren Fall für eckendichte Konvexbogen erledigt, ohne dabei irgendwie auf die differenzierbaren Fälle zurückzugreifen. Weiter haben wir in § 6 den außergewöhnlichen differenzierbaren Fall auf entweder den nicht-differenzierbaren oder auf den gewöhnlichen differenzierbaren Fall zurückgeführt. Somit bleibt nur noch für den letzteren ein normiertes Kreissystem zu konstruieren. Wir machen dabei die

Voraussetzung A. Bei den auf besagte Konstruktion abzielenden, im folgenden beschriebenen, monotonen und Zwischenprozessen tritt niemals ein nicht-differenzierbarer Fall ein. Diese Voraussetzung zieht *keine Beschränkung der Allgemeinheit* unserer Betrachtungen nach sich; denn im nicht-differenzierbaren Falle ist die Existenz eines normierten Kreissystems bereits gesichert.

7, 2. Zur Konstruktion normierter Kreissysteme im gewöhnlichen differenzierbaren Fall verfahren wir zunächst genau wie in Nr. **5**, 1. Wir konstruieren nämlich eine Nachbarschaft $\mathfrak{N}_0$ des vorgelegten Kreises $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(P_0)$, eine zugehörige obere Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von P_0 auf $\mathfrak{T}$, sowie eine (von oben in sich dichte) Kreismenge $\mathfrak{G}$ mit den gleichen Eigenschaften wie in Nr. **5**, 1. Anschließend lassen sich genau die gleichen Ausführungen machen, wie in Nr. **5**, 2 und **5**, 3, nur mit dem Unterschiede, daß wir im gewöhnlichen differenzierbaren Falle zunächst (vgl. das Vorgehen in Nr. **5**, 3) die Gesamtheit $\mathfrak{G}_d$ derjenigen Kreise aus $\mathfrak{G}$ betrachten, zu welchen *differenzierbare* Punkte von $\mathfrak{U}_0$ als Berührungspunkte gehören. Daß für die Kreise von $\mathfrak{G}_d$ die Forderungen I′—III′ erfüllt sind, ergibt sich wie früher; dabei wird immer angenommen, daß die $\mathfrak{N}_0$ bzw. $\mathfrak{U}_0$ hinreichend klein gewählt seien. Es handelt sich also darum, auch noch die in Nr. **5**, 2 aufgeführten Forderungen IV′ und VII′ zu erfüllen.

7, 3. Was zunächst die Forderung IV′ anlangt, so ist sie nur dann nicht erfüllt, wenn für den jeweils betrachteten Kreis $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(P; \mathfrak{M})$, welcher aus der, dem Punkte P als Berührpunkt zugeordneten Kreismenge $\mathfrak{M}(P)$ stammt, entweder ein *Schnitt-* oder ein *Stützfall* vorliegt; dabei haben wir einen Schnittfall, sobald P Schnittpunkt auf $\mathfrak{K}$ ist derart, daß eine untere Umgebung von P auf $\mathfrak{K}$ auf der entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{T}$ liegt wie eine untere Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{K}_0$; hingegen liegt ein Stützfall vor, wenn P Stützpunkt von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{T}$ ist derart, daß dieser Stützpunkt bezüglich $\mathfrak{T}$ nicht gleichartig (vgl. I., Nr. **2**, 6) liegt mit P_0 bezüglich $\mathfrak{T}$. Die Forderung IV′ wäre also höchstens dann

nicht erfüllbar, wenn die Schnitt- oder Stützfälle für eine in einer oberen Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{T}$ dicht liegende Menge von Punkten P aus $\mathfrak{G}_d$ nicht zu vermeiden wären.

Zum Beweise der Erfüllbarkeit von IV′ schließen wir indirekt. Wir machen also die

Annahme W. Der Schnitt- oder Stützfall trete auf für alle Punkte einer oberen Umgebung von P_0 auf $\mathfrak{T}$, die einer in dieser Umgebung dichten Menge angehören; die Voraussetzung A ist als stets gültig angenommen.

Man konstruiere alsdann aus einem der zu $\mathfrak{K}_0$ (hinreichend) benachbarten Kreise $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{M})$, welcher einen Schnitt- oder Stützfall liefert, mit Hilfe eines Zwischenprozesses $\boldsymbol{Z_1}$ gemäß Nr. **6**, 3—**6**, 4 einen neuen Quasi-Ausgangskreis $\mathfrak{K}'$ bezüglich $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'$; indem man P bzw. $\mathfrak{K}(P; \mathfrak{M})$ hinreichend nahe bei P_0 bzw. bei $\mathfrak{K}_0$ und indem man $\boldsymbol{Z_1}$ genügend klein wählt, kann man $\mathfrak{K}'$ so nahe bei $\mathfrak{K}_0$ annehmen, daß die Annahmen bei den Betrachtungen von Nr. **1**, 56 erfüllt werden. Jetzt unterwerfen wir den $\mathfrak{K}'$ einem monotonen Prozeß $\boldsymbol{M_2}$ gemäß § 2 und erhalten einen Kreis $\mathfrak{K}_1$, welcher zum Falle III (vgl. Nr. **3**, 3) gehört, und welcher zwischen P'_r und P'_v (vgl. Nr. **6**, 5) insbesondere mindestens zwei Schnittpunkte oder einen Verluststützpunkt (bezüglich $\boldsymbol{M_2}$) *mehr* besitzt als $\mathfrak{K}_0$ (bezüglich $\boldsymbol{M_1}$).

Zufolge Voraussetzung A (Nr. **7**, 1) kommt für $\mathfrak{K}_1$ nur ein differenzierbarer Fall in Betracht. Liegt ein außergewöhnlicher differenzierbarer Fall vor, so führt man $\mathfrak{K}_1$ gemäß Nr. **6**, 6 mit Hilfe endlich vieler beliebig kleiner Reduktions- und nötigenfalls Zwischenprozesse sowie monotone Prozesse in einen Kreis $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ über, welcher einen gewöhnlichen differenzierbaren Fall liefert (nicht-differenzierbare Fälle sind ja hier ausgeschlossen); dabei wird bei jedem der etwa benötigten Zwischenprozesse, die Anzahl der auf einem bestimmten Teilbogen von $\mathfrak{T}'$ gelegenen Schnittpunkte erhöht. Wir können also jedenfalls aus $\mathfrak{K}(P_0)$ mit Hilfe eines Prozesses, welcher sich aus endlich vielen Zwischen- und monotonen Prozessen zusammensetzt, zu einem, dem gewöhnlichen differenzierbaren Falle zugehörigen Kreise $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ gelangen, und zwar (entspr. unserer Annahme W) unter Erhöhung der Anzahl der Schnittpunkte in einem bestimmten Teilbogen von $\mathfrak{T}'$. Sollte nun für $\mathfrak{K}_1$ bzw. für $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ wiederum die Annahme W zutreffen, so läßt sich auf $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{K}}_1$ der gleiche Prozeß anwenden, wie oben auf $\mathfrak{K}_0$. Da alle in Nr. **1**, 56 gemachten Voraussetzungen für unseren Prozeß erfüllt sind, so kann dessen Wiederholung jedenfalls nur endlich oft möglich sein (gemäß Nr. **1**, 56). Es muß also im Laufe des wiederholten Prozesses einmal ein gewöhnlicher differenzierbarer Fall auftreten, derart, daß für den zugehörigen Kreis die Annahme W nicht erfüllt ist, w. z. z. w.

7, 4. Dem in Nr. **7**, 3 Bewiesenen zufolge können wir o. B. d. A. annehmen, daß *jeder* Kreis aus $\mathfrak{G}_d$, welcher in einem beliebigen differenzierbaren Punkte P aus $\mathfrak{U}_0$ die Tangente mit $\mathfrak{T}$ gemeinsam hat, den Bogen $\mathfrak{T}$ in P stützt, und zwar so, daß besagter Kreis gleichartig liegt bezüglich $\mathfrak{T}$ und P sowie auch gleichartig mit $\mathfrak{K}_0$ bezüglich $\mathfrak{T}$ und P_0. Dann sind aber für $\mathfrak{G}_d$ die Forderungen I′—IV′ erfüllt. Um auch die Forderung VII′ und damit die Forderungen V′ und VI′ zu erfüllen, benutzen wir wiederum die Tatsache, daß $\mathfrak{G}_d$ in sich dicht sowie in sich dicht von oben ist, daß wir also den Satz von Nr. **1**, 23 anwenden können. Dieser gestattet, genau ebenso wie in Nr. **5**, 3, den Schluß auf die Existenz der gewünschten Kreise für eine auf einem Teilbogen von $\widetilde{\mathfrak{T}}$ dichte Menge von differenzierbaren Punkten.

Die Ecken können jetzt einbezogen werden mit Hilfe der Tatsache, daß jede Ecke Limes einer monoton absteigenden Folge von differenzierbaren Punkten und daß die Menge der zu den differenzierbaren Punkten bereits konstruierten Kreise bedingt kompakt ist (vgl. Nr. **5**, 4).

Eingegangen 16. April 1938.

Eine neue Darstellung der Integrationstheorie der vollständigen Systeme.

Von *Friedrich Engel* in Gießen.

1. Das Ziel der folgenden Arbeit ist, die Integrationstheorie der vollständigen Systeme so zu entwickeln, daß die Punktmannigfaltigkeiten des R_n nicht durch ihre Gleichungen zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dargestellt werden, sondern in der Weise, die Gauß in die Differentialgeometrie eingeführt hat. Eine m-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des R_n erscheint also bestimmt durch n Gleichungen, die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Funktionen von m unabhängigen Veränderlichen ausdrücken.

In meinem von K. Faber bearbeiteten Buche[1]) wird diese Gaußische Darstellung der Mannigfaltigkeiten auch schon bei vielen Gelegenheiten benutzt, leider aber noch nicht mit der Gleichmäßigkeit und Folgerichtigkeit, die nötig ist, sollen die Vorzüge des Verfahrens vollständig an den Tag treten.

§ 1. Die Integrationstheorie einer einzelnen Gleichung.

2. Die Aufgabe, eine lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. O.

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

zu integrieren, wird gewöhnlich so aufgefaßt, daß alle Lösungen bestimmt werden sollen, also alle Funktionen $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für die $X\varphi$ identisch verschwindet. Vom Lieschen Standpunkte aus erscheint die Aufgabe etwas allgemeiner gefaßt.

Lie schreibt die Gleichung $Xf = 0$ in der Form

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, p_i = 0 \tag{1}$$

und betrachtet $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als die Richtungskoeffizienten einer durch einen beliebigen Punkt x gehenden $(n-1)$-fach ausgedehnten Ebene $\sum (\xi_i - x_i)\, p_i = 0$. Die n Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die n Verhältnisgrößen $p_1 : p_2 : \cdots : p_n$ sind für ihn die Koordinaten eines Elementes des R_n, und die Integration von (1) kommt darauf hinaus, alle Integralvereine von (1) zu bestimmen, das heißt, alle Vereine von ∞^{n-1} Elementen x, p, die (1) befriedigen.

3. Wir erinnern daran, daß ein Verein von Elementen eine solche Schar von Elementen ist, in der je zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigt liegen, also die Bedingung $\sum p_i dx_i = 0$ der vereinigten Lage erfüllen. Daß ferner jeder Verein von ∞^{n-1}

[1]) F. Engel-K. Faber, Vorlesungen über die Liesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O., Leipzig 1932.

Elementen aus den ∞^{n-1} Elementen einer l-fach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit M_l

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_l) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

besteht, wo $0 \leqq l < n$ ist, und wo die Matrix der φ_i in bezug auf die t_k den Rang l hat.

4. Der durch (2) bestimmte Verein von ∞^{n-1} Elementen wird durch die vereinigten Gleichungen (2) und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l) \tag{3}$$

dargestellt. Er ist ein Integralverein von (1), wenn das Gleichungensystem (2), (3) die Gleichung (1) nach sich zieht, wenn also die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, p_i = 0 \tag{4}$$

ein Folge von (3) ist.

Wenn die Mannigfaltigkeit ein Punkt ist, so ist $l = 0$ und die φ_i sind Konstanten, etwa $= a_i$. Die Gleichung (4) ist dann nur erfüllt, wenn alle Ausdrücke $\xi_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ verschwinden. Da die hierdurch ausgeschiedenen Punkte niemals den ganzen Raum ausfüllen, lassen wir alle etwaigen Integralvereine dieser Art unberücksichtigt.

5. Ist $l > 0$, so liefert die Mannigfaltigkeit (2) dann und nur dann einen Integralverein, wenn es l Funktionen $\varrho_k(t_1, t_2, \ldots, t_l)$ gibt, die den n Gleichungen

$$\xi_i(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \sum_{k=1}^{l} \varrho_k(t_1, t_2, \ldots, t_l) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

genügen. Dann aber können wir immer $t_1, t_2, \ldots, t_l$ als Funktionen einer Veränderlichen t derart bestimmen, daß

$$\frac{dt_k}{dt} = \varrho_k(t_1, t_2, \ldots, t_l) \qquad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

wird, und zwar können wir den t_k für $t = 0$ beliebige Anfangswerte t_k^0 vorschreiben, die nur nicht alle ϱ_k zum Verschwinden bringen dürfen. Ergibt sich dabei:

$$t_k = \vartheta_k(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_l^0, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, l), \tag{6}$$

so werden die Ausdrücke:

$$x_i = \varphi_i(\vartheta_1(t^0, t), \ldots, \vartheta_l(t^0, t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

bei willkürlicher Wahl der t_k^0 solche Funktionen von t, die die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

befriedigen. Mit andern Worten, die Gleichungen (7) stellen, wenn man t als unabhängige Veränderliche betrachtet, lauter Bahnkurven der infinitesimalen Transformation Xf dar. Das aber heißt wieder, daß jede Bahnkurve von Xf, die durch einen Punkt der Mannigfaltigkeit (2) geht, ganz auf der Mannigfaltigkeit liegt, daß also diese Mannigfaltigkeit unter der hier gemachten Voraussetzung von Bahnkurven von Xf erzeugt ist.

6. Es sei andrerseits

$$x_i = \omega_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

die durch den Punkt x_i^0 gehende Bahnkurve von Xf, wobei wir voraussetzen, daß die Ausdrücke $\xi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nicht alle verschwinden, damit (9) eine wirkliche Kurve wird. Dann bestimmen die vereinigten Gleichungen (9) und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)\, p_i = 0 \tag{10}$$

offenbar einen Integralverein von Xf. Nach dem eben Bewiesenen fällt aber die Bahnkurve (9) immer mit jeder Bahnkurve von Xf zusammen, die durch einen beliebigen ihrer Punkte geht. Demnach stellen die Gleichungen (9) nur ∞^{n-1} verschiedene Bahnkurven dar, weil jede einzelne Bahnkurve ∞^1 mal erhalten wird.

7. Um in der Umgebung des Punktes x_i^0 alle ∞^{n-1} Bahnkurven zu haben, aber jede nur einmal, legen wir durch den Punkt x_i^0 eine $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene

$$x_i = x_i^0 + \alpha_{i1} u_1 + \cdots + \alpha_{i,n-1} u_{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

die mit der Bahnkurve (9) keinen dem Punkte x_i^0 unendlich benachbarten Punkt gemein hat; wir erteilen also den $\alpha_{i\mu}$ solche feste Werte, daß die Determinante

$$|\alpha_{i1}, \ldots \alpha_{i,n-1}\, \xi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

von Null verschieden ausfällt. Durch alle Punkte dieser Ebene, die in einer gewissen Umgebung von x_i^0 liegen, haben wir die hindurchgehenden Bahnkurven zu legen. Wir müssen also in (9) die Größen $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ durch die rechten Seiten der Gleichungen (11) ersetzen, und die absoluten Beträge der u_k geeignet einschränken. Erhalten wir auf diese Weise:

$$x_i = \Omega_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

so stellen die Gleichungen (12) in der Umgebung des Punktes x_i^0 alle Bahnkurven von Xf dar und zwar jede nur einmal. Sie sind infolgedessen nach den Größen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ und t auflösbar. Unsere ∞^{n-1} Bahnkurven füllen den ganzen Raum in der Umgebung von x_i^0 aus und liefern ∞^{n-1} verschiedene Integralvereine von $Xf = 0$, die im Ganzen ∞^{2n-2} verschiedene Elemente x, p enthalten. Da diese ∞^{2n-2} Elemente alle die Gleichung $Xf = 0$ erfüllen, so erschöpfen sie den ganzen Elementvorrat von $Xf = 0$ gerade einmal und stellen im *Lie*schen Sinne eine vollständige Lösung der Differentialgleichung dar.

8. Nach dem Früheren wird jeder Integralverein von Xf durch eine Punktmannigfaltigkeit bestimmt, die von Bahnkurven von Xf erzeugt ist. Nunmehr aber leuchtet ein, daß auch umgekehrt jede von Bahnkurven von Xf erzeugte Mannigfaltigkeit einen Integralverein liefert. In der Tat, nehmen wir ∞^{l-1} Bahnkurven, indem wir uns

$$u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$$

als Funktionen von $v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}$ gegeben denken,

$$(0 < l < n)$$

so stellt (12) eine l-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit dar, deren zugehöriger Elementverein die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega_i}{\partial v_k} p_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, l-l),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} p_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)\, p_i = 0$$

befriedigt und somit ein Integralverein ist.

Hiermit sind alle Integralvereine gefunden, die in einer gewissen Umgebung des Punktes x_i^0 liegen.

9. Ist $\Phi(u)$ eine Lösung von $Xf = 0$, so ist $X\Phi \equiv 0$. Die Gleichung $\Phi = \text{const.}$ stellt aber eine Schar von ∞^1 M_{n-1} dar, deren Tangentialebenen in jedem Punkte x_i die Richtungskoeffizienten $p_i = \Phi_{x_i}$ haben und infolgedessen die Gleichung $\Sigma\, \xi_i p_i = 0$ befriedigen. Die M_{n-1} $\Phi = \text{const.}$ bestimmen daher eine Schar von ∞^1 Integralvereinen von $Xf = 0$.

§ 2. Die Theorie der Lösungen einer Gleichung $Xf = 0$.

10. Auch die Theorie der Lösungen von $Xf = 0$ läßt sich von dem hier gewählten Gesichtspunkte aus darstellen. Diese Darstellung ist aber bei weitem nicht so einfach und vor allen Dingen nicht so natürlich, wie wenn man mit den Funktionen von

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

selber arbeitet. Die folgenden Betrachtungen werden deshalb nur der Vollständigkeit wegen angestellt. Sie sind geradezu ein Schulbeispiel dafür, das ein allgemeines Verfahren, das sonst sehr schnell zum Ziele führt, für besondere Aufgaben keineswegs das zweckmäßigste zu sein braucht.

11. Wir wollen die $\infty^1 M_{n-1}\ \Phi = a$, die durch die Lösung Φ von $Xf = 0$ bestimmt sind, in der Form:

$$x_i = F_i(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, also durch Gleichungen, die nach den unabhängigen Veränderlichen

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$$

und nach dem Parameter a auflösbar sind. Zu diesem Zwecke machen wir in $\Phi(x) = a$ die Substitution (11) und erhalten eine Gleichung

$$\overline{\Phi}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = a, \tag{13}$$

die wir durch $n - 1$ nach $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$ und a auflösbare Gleichungen

$$u_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{14}$$

ersetzen. Dann liefern die Gleichungen (12) bei Einsetzung der Ausdrücke (14) ein Gleichungensystem

$$x_i = \Theta_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, t, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

das nach $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, t, a$ auflösbar ist und eine neue Darstellung unserer $\infty^1 M_{n-1}$ gibt.

Es ist klar, daß wir die allgemeinste Schar von $\infty^1 M_{n-1}$, die durch eine Lösung von $Xf = 0$ geliefert wird, dadurch erhalten, daß wir das allgemeinste nach

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, a$$

auflösbare Gleichungensystem (14) bilden und dann aus (12) durch die Substitution (14) die Gleichungen (15) ableiten.

12. Wir können auch von einer beliebig gewählten Gleichung (13) ausgehen, diese durch $n - 1$ Gleichungen (14) ersetzen und dann die Gleichungen (15) bilden. Augenscheinlich erhalten wir dann durch Auflösung von (15) eine Gleichung von der Form $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$, die sich bei der Substitution (12) gerade in die Gleichung (13) verwandelt. Wählen wir für $\overline{\Phi}$ nach und nach $n - 1$ unabhängige Funktionen

$$\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_{n-1},$$

so erhalten wir $n - 1$ unabhängige Lösungen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$. Da sich jede Funktion $\overline{\Phi}$ durch $\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_{n-1}$ allein ausdrücken läßt:

$$\overline{\Phi}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = \psi(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2, \ldots, \overline{\Phi}_{n-1}),$$

so läßt sich die der Funktion $\overline{\Phi}$ entsprechende Lösung $\Phi(x)$ durch $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$ in derselben Weise:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(\Phi_1(x), \ldots, \Phi_{n-1}(x))$$

ausdrücken.

Die allgemeinste Lösung von $Xf = 0$ ist eine willkürliche Funktion von $n - 1$ von einander unabhängigen Lösungen.

§ 3. Ein m-gliedriges vollständiges System und das kovariante Pfaffsche System.

13. Die $0 < m < n$ linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, p_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{16}$$

seien von einander unabhängig und mögen ein m-gliedriges vollständiges System bilden, so daß Identitäten von der Form:

$$(X_k X_j) = \sum_{s=1}^{m} \varphi_{kjs}(x)\, X_s f \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, m) \tag{17}$$

bestehen, wo

$$(X_k X_j) = \sum_{i=1}^{n} (X_k \xi_{ji} - X_j \xi_{ki})\, p_i$$

ist, und wo die Funktionen φ_{kjs} eindeutig bestimmt sind.

Durch Verwendung der Buchstaben p_j an Stelle der Ableitungen $\partial f : \partial x_j$ deuten wir an, daß wir die Integrationstheorie unsres vollständigen Systems im Lieschen Sinne behandeln wollen, daß wir also die Integralvereine von (16) suchen. Wir nehmen dabei auch den Fall $m = 1$ mit, wo die Bedingungen (17) gar nicht auftreten.

14. Zu dem Systeme (16) gehört ein kovariantes $(n - m)$-gliedriges Pfaffsches System, das man erhält, wenn man alle $(m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_n \\ \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \xi_{m1} & \ldots & \xi_{mn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

gleich Null setzt. Dabei ist es gleichgültig, ob die Gleichungen (16) ein vollständiges System bilden oder nicht. Bilden sie aber ein solches, so ist das zugehörige Pfaffsche System, wie sich zeigen wird, unbeschränkt integrabel. Es stellt ein Integrationsproblem dar, das im wesentlichen mit der Integration des vollständigen Systems gleichbedeutend ist.

§ 4. Punktmannigfaltigkeiten, die von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt sind.

15. Die Integralvereine unsres vollständigen Systems sind die gemeinsamen Integralvereine aller Gleichungen von der Form:

$$\sum_{k=1}^{m} \chi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, X_k f = 0\,,$$

wo die χ_k willkürliche Funktionen bezeichnen. Jeder etwaige Integralverein ist daher durch eine Punktmannigfaltigkeit bestimmt, die von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \chi_k X_k f$ erzeugt ist.

Um nachzuweisen, daß es derartige Punktmannigfaltigkeiten gibt, stellen wir zunächst die einfachere Frage nach den Punktmannigfaltigkeiten, die von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt sind, unter den λ_k Parameter verstanden.

16. Durch den Punkt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geht eine Bahnkurve der infinitesimalen Transformation $\Sigma \lambda_k X_k f$, die wir erhalten, wenn wir das simultane System:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

mit den Anfangsbedingungen $(x_i)_{t=0} = a_i$ integrieren. Dabei ergebe sich:

$$x_i = \omega_i(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t;\ a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Sind die ξ_{ki} gewöhnliche Potenzreihen von $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$, so werden die ω_i gewöhnliche Potenzreihen von $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, a_1 - x_1^0, \ldots, a_n - x_n^0$, die sicher in einem endlichen Gebiete unbedingt konvergieren.

Wir setzen voraus, daß $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, also einer, für den nicht alle m-reihigen Determinanten der Matrix der ξ_{ki} verschwinden. Ist dann $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ebenfalls ein Punkt von allgemeiner Lage, so stellen die Gleichungen (20), wenn man $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ als unabhängige Veränderliche betrachtet, eine m-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit M_m dar, die von den durch den Punkt a_i gehenden Bahnkurven der ∞^{m-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ gebildet wird.

17. Soll nun eine Mannigfaltigkeit, die durch den Punkt a_i geht, von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ erzeugt sein, so muß sie jedenfalls die Mannigfaltigkeit M_m umfassen; außerdem aber muß sie die Eigenschaft haben, daß die durch einen beliebigen ihrer Punkte gehenden Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \mu_k X_k f$ auf ihr liegen. Wir werden sehen, daß unsre M_m selber diese Eigenschaft hat, daß sie also die kleinste durch den Punkt a_i gehende Mannigfaltigkeit von der verlangten Beschaffenheit ist.

In der Tat, soll unsre M_m die angegebene Eigenschaft haben, so muß jede infinitesimale Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ jeden Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der M_m in einen unendlich benachbarten Punkt $x_i + dx_i$ überführen:

$$dx_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \xi_{ki}(x)\, \delta\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

der wieder auf der M_m liegt. Wenn wir uns auf eine gewisse Umgebung des Punktes x_i^0 beschränken, so ist x_i ebenfalls ein Punkt von allgemeiner Lage. Die Gleichungen (21) stellen daher ∞^{m-1} verschiedene, dem Punkte x_i unendlich benachbarte Punkte dar, und das müssen in dem vorliegenden Falle alle ∞^{m-1} dem Punkte x_i unendlich benachbarten Punkte der M_m sein. Unsre Forderung kommt demnach darauf hinaus, daß die dem Punkte x_i unendlich benachbarten Punkte der M_m immer die $(m+1)$-reihigen Determinanten der Matrix (18) zum Verschwinden bringen, daß also die M_m eine Integralmannigfaltigkeit des früher erwähnten Pfaffschen Systems ist.

18. Nun wird jeder dem Punkte x_i unendlich benachbarte Punkt $x_i + dx_i$ unsrer M_m durch die Gleichungen

$$dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} d\lambda_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \tag{22}$$

bestimmt, wo der Faktor von dt den Wert $\Sigma \lambda_k \xi_{ki}$ besitzt. Bei konstanten λ_k hat daher dx_i schon die verlangte Form (21), es ist ja das betreffende $\mu_k \delta\tau = \lambda_k dt$. Soll der Ausdruck (22) auch bei veränderlichen λ_k die Form (21) haben, so ist notwendig und hinreichend, daß man die Ausdrücke

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} d\lambda_j = \delta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{22'}$$

bei beliebigen $d\lambda_j$ in der Form:

$$\sum_{j=1}^{m} \delta\vartheta_j \xi_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen kann, wo die $\delta\vartheta_j$ nur von den $d\lambda_k$ und von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, t$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ abhängen. Es muß also möglich sein, die $\delta\vartheta_j$ derart als lineare homogene Funktionen

der $d\lambda_k$ zu bestimmen, daß die n Ausdrücke

$$U_i = \delta x_i - \sum_{j=1}^{m} \delta\vartheta_j \xi_{ji} \tag{23}$$

bei der Substitution (20) identisch verschwinden.

19. Da die x_i als Funktionen von t den Gleichungen (19) genügen, ergibt sich:

$$\frac{dU_i}{dt} = \delta \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_{ki} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dt} \delta\vartheta_j \,.\, \xi_{ji} - \sum_{j=1}^{m} \delta\vartheta_j \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_k \xi_{ji}.$$

Aus (17) folgt aber:

$$X_k \xi_{ji} = X_j \xi_{ki} + \sum_{s=1}^{m} \varphi_{kjs} \xi_{si},$$

also kommt:

$$\frac{dU_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} d\lambda_k \xi_{ki} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_v} \delta x_v - \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dt} \delta\vartheta_j \,.\, \xi_{ji} - \sum_{j,k=1}^{m} \lambda_k \delta\vartheta_j \sum_{v=1}^{n} \xi_{jv} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_v} - \sum_{j,k,s=1}^{m} \lambda_k \delta\vartheta_j \varphi_{kjs} \xi_{si},$$

oder:

$$\frac{dU_i}{dt} = \sum_{v=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_v} \right\} U_v + \sum_{s=1}^{m} \xi_{si} \left\{ d\lambda_s - \frac{d}{dt} \delta\vartheta_s - \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_k \varphi_{kjs} \delta\vartheta_j \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Hier muß man sich selbstverständlich in den ξ_{sk} und den φ_{kjs} die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Ausdrücke (20) ersetzt denken.

20. Sollen die U_i alle verschwinden, so muß in (24) immer die zweite Summe bei der Substitution (20) verschwinden, was wegen der Unabhängigkeit der m Gleichungen $X_k f = 0$ nur eintritt, sobald:

$$\frac{d}{dt} \delta\vartheta_s = d\lambda_s + \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_j \varphi_{kjs}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, \delta\vartheta_k \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{25}$$

Erfüllen aber die $\delta\vartheta_s$ diese Gleichungen, so müssen von den U_i die folgenden befriedigt werden:

$$\frac{dU_i}{dt} = \sum_{v=1}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_v} \right\} U_v \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

wo rechts ebenfalls jedes $x_v = \omega_v$ zu setzen ist. Um das identische Verschwinden der U_i zu erreichen, brauchen wir demnach nur dafür zu sorgen, daß die Anfangsbedingungen $(U_i)_{t=0} = 0$ erfüllt sind. Nun kommt aber für $t = 0$ offenbar $\delta x_i = 0$, also ist

$$(U_i)_{t=0} = - \sum_{j=1}^{m} (\delta\vartheta_j)_{t=0} \xi_{ji}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Den Anfangsbedingungen $(U_i)_{t=0} = 0$ wird daher durch die Anfangsbedingungen

$$(\delta\vartheta_j)_{t=0} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{27}$$

genügt, und zwar, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, auf keine andre Weise. Denken wir uns jetzt die Gleichungen (25) unter den Anfangsbedingungen (27) integriert, so erreichen wir in allgemeinster Weise, daß die U_i alle verschwinden.

21. Setzen wir schließlich

$$\delta\vartheta_k = \sum_{j=1}^{m} \psi_{jk} d\lambda_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{28}$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$(29) \qquad \delta x_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda_k} d\lambda_k = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \psi_{kj} \xi_{ji}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \right\} d\lambda_k ,$$

die identisch erfüllt sind, wenn die ψ_{kj} aus den Differentialgleichungen

$$(30) \qquad \frac{d\psi_{js}}{dt} = \varepsilon_{js} + \sum_{\tau,k=1}^{m} \lambda_\tau \varphi_{k\tau s}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, \psi_{jk} \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, m)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(31) \qquad (\psi_{js})_{t=0} = 0 \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmt werden. Dabei ist $\varepsilon_{js} = 0$ für $j \neq s$ und $= 1$ für $j = s$.

Die ψ_{js} haben hier die Form: $t(\varepsilon_{js} + \cdots)$, wo die weggelassenen Glieder gewöhnliche Potenzreihen von $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$ sind und für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ verschwinden. Bedenkt man, daß die ω_i in (20) die Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ und t nur in den Verbindungen $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ erhalten und also die Differentialgleichungen

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda_j} = t \frac{d\omega_i}{dt}$$

befriedigen, so erhält man aus (29) noch die Gleichungen:

$$t \frac{d\omega_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} t \lambda_k \xi_{ki}(\omega) = \sum_{k,j=1}^{m} \lambda_k \psi_{kj} \xi_{ji}(\omega) ,$$

die sich unter den gemachten Voraussetzungen in die folgenden zerlegen:

$$(32) \qquad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_{jk} = t \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese aber folgen auch unmittelbar aus (30) und (31), wenn man die Beziehungen $\varphi_{k\tau s} + \varphi_{\tau k s} = 0$ berücksichtigt.

§ 5. Die gefundenen Mannigfaltigkeiten sind von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \chi_k(x)\, X_k f$ erzeugt.

22. Das vorläufige Ziel, das wir uns im Anfange von § 4 gestellt hatten, ist nunmehr erreicht. Wir hatten eine M_m gebildet, indem wir durch den Punkt a_i die hindurchgehenden Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ legten. Wir dachten uns nun die Funktionen ψ_{kj} durch die Differentialgleichungen (30) und die Anfangsbedingungen (31) bestimmt. Dann führt jede infinitesimale Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ jeden Punkt x_i dieser M_m in einen unendlich benachbarten Punkt $x_i + dx_i$ über, wo

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \xi_{ji}\, \delta\tau .$$

Dieser Ausdruck aber läßt sich nach (29) und (19) in der Form:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} d\lambda_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt$$

darstellen, wenn man

$$(33) \qquad \mu_j \delta\tau = \sum_{k=1}^{m} \psi_{ik} d\lambda_k + \lambda_j dt$$

wählt.

23. Setzen wir jetzt noch $\psi_{jk} = t\Psi_{jk}$, so werden die Ψ_{jk} gewöhnliche Potenzreihen von $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$, deren Determinante für $\lambda_1 t = \cdots = \lambda_m t = 0$ den Wert 1 hat. Nach

(32) ist ferner:

$$(32') \qquad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Psi_{jk} = \lambda_k,$$

sodaß (33) in der Gestalt

$$(33') \qquad \mu_j \delta\tau = \sum_{k=1}^{m} \Psi_{jk} d(\lambda_k t)$$

erscheint.

24. Um das gewonnene Ergebnis bequem aussprechen zu können, deuten wir $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ als Punktkoordinaten auf unsrer M_m, was wir in einer gewissen Umgebung des Punktes a_i ohne Bedenken tun dürfen. Dann können wir sagen:

Jede infinitesimale Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ führt den Punkt $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ der M_m in den unendlich benachbarten Punkt $\lambda_k t + d(\lambda_k t)$ über, der durch (33′) bestimmt ist, sie transformiert also die Punkte der M_m durch eine infinitesimale Transformation, die wir durch Auflösung der Gleichungen (33′) in der Form:

$$(34) \qquad \delta(\lambda_k t) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j A_{jk}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t)\, \delta\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

darstellen können, wo die A_{jk} gewöhnliche Potenzreihen ihrer Argumente sind.

Es ist also bewiesen, daß unsre M_m von Bahnkurven jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ erzeugt ist. Wir finden die erzeugenden Bahnkurven, wenn wir die $\lambda_k t$ durch Integration des simultanen Systems (34) als Funktionen von τ bestimmen, mit den Anfangsbedingungen: $(\lambda_k t)_{\tau=0} = \lambda_k^0 t^0$.

25. Aber es ergibt sich noch mehr. Jede infinitesimale Transformation $\Sigma \chi_k(x) X_k f$ transformiert nämlich den Punkt $x_1, \ldots, x_n$ der M_m, der die Koordinaten $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ hat, genau so wie die infinitesimale Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$, für die $\mu_k = \chi_k(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Unsre M_m ist daher auch von Bahnkurven jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \chi_k X_k f$ erzeugt, und zwar findet man die erzeugenden Bahnkurven durch Integration des simultanen Systems:

$$(35) \qquad \delta(\lambda_k t) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(\omega_1, \ldots, \omega_n)\, A_{jk}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t)\, \delta\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

26. Wir machen hier nur noch folgende Bemerkung. Legen wir durch einen Punkt $\lambda_k t$ der M_m die hindurchgehenden Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \mu_k X_k f$, so erhalten wir die M_m wieder. Demnach stellen die Gleichungen:

$$(36) \qquad x_i = \omega_i(\mu_1 \tau, \ldots, \mu_m \tau,\ \omega_1(\lambda t, a), \ldots, \omega_n(\lambda t, a)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn man $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, \mu_1 \tau, \ldots, \mu_m \tau$ als unabhängige Veränderliche betrachtet, ebenfalls unsre M_m dar. Unter den $2m$ unabhängigen Veränderlichen befinden sich allerdings m überzählige.

Bestimmt man nun $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t$ aus dem simultanen Systeme (34) durch die Anfangsbedingungen $(\lambda_k t)_{\tau=0} = \lambda_k^0 t^0$ und findet man:

$$\lambda_k t = \Theta_k(\lambda_1^0 t^0, \ldots, \lambda_m^0 t^0,\ \mu_1 \tau, \ldots, \mu_m \tau,\ a_1, \ldots, a_n),$$

so werden offenbar die Gleichungen:

$$x_i = \omega_i(\Theta_1(\lambda t, \mu\tau, a), \ldots, \Theta_m(\lambda t, \mu\tau, a),\ a_1, \ldots, a_n))$$

mit den Gleichungen (36) identisch, und damit sind die $2m$ Veränderlichen in (36) auf m wesentliche zurückgebracht.

§ 6. Die Integralvereine des vollständigen Systems.

27. Wir wissen nunmehr, daß die Gleichungen (20) eine M_m darstellen, die von Bahnkurven jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$, ja sogar von Bahnkurven jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \chi_k(x) X_k f$ erzeugt ist. Jede solche M_m bestimmt daher einen Verein von ∞^{n-1} Elementen, der ein Integralverein einer jeden Gleichung $\Sigma \chi_k(x) X_k f = 0$ ist und infolgedessen zugleich ein Integralverein des vollständigen Systems (16). Überdies ist klar, daß die Punktmannigfaltigkeit, zu der ein beliebiger Integralverein des vollständigen Systems gehört, von M_m der gefundenen Art erzeugt sein muß, wenn sie nicht den Rang der Matrix der ξ_{ki} kleiner als m macht. Die Integralvereine aber, bei denen eine solche Verkleinerung des Ranges eintritt, können wir von der Betrachtung ausschließen, weil die, für welche der Rang einen bestimmten Wert $l < m$ bekommt, doch nicht den ganzen Raum ausfüllen.

28. Nun aber sind unsre M_m so erklärt, daß wir jede unter ihnen ∞^m Mal erhalten, denn sie entsteht, wenn wir durch einen beliebigen ihrer ∞^m Punkte die hindurchgehenden Bahnkurven der ∞^{m-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ legen. Es gibt daher in Wahrheit nur ∞^{n-m} verschiedene M_m, die den Raum in der Umgebung des Punktes x_i^0 gerade einmal ausfüllen und somit eine Zerlegung dieses Raumes bestimmen.

Um in einer gewissen Umgebung des Punktes x_i^0 alle M_m zu erhalten, aber jede nur einmal, legen wir durch den Punkt x_i^0 eine $(n - m)$-fach ausgedehnte Ebene E_{n-m}

$$x_i = x_i^0 + \alpha_{1i} u_1 + \cdots + \alpha_{n-m,i} u_{n-m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

die so gewählt ist, daß der Punkt x_i^0 bei keiner infinitesimalen Transformation $\Sigma \chi_k X_k f$ in einen unendlich benachbarten Punkt von E_{n-m} übergeht. Das wird erreicht, wenn wir den Konstanten $\alpha_{\mu i}$ solche feste Werte erteilen, daß die Determinante

$$|\xi_{1i}(x^0) \cdots \xi_{mi}(x^0)\, \alpha_{1i} \cdots \alpha_{n-m,i}| \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

von Null verschieden ausfällt. Ersetzen wir dann in (20) die a_i durch die rechten Seiten von (37), so erhalten wir gewisse Gleichungen mit $n - m$ Parametern $u_1, \ldots, u_{n-m}$:

$$x_i = \Omega_i(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, u_1, \ldots, u_{n-m}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

die unsre ∞^{n-m} M_m so darstellen, wie wir wünschten. Diese Gleichungen sind nach $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, u_1, \ldots, u_{n-m}$ auflösbar.

29. Jede M_m unsrer Schar (38) bestimmt einen Verein von ∞^{n-1} Elementen, der alle Gleichungen des vollständigen Systems (16) befriedigt und also ein Integralverein des Systems ist. Die ∞^{n-m} Integralvereine, die wir so finden, enthalten im Ganzen ∞^{2n-m-1} Elemente, die den Elementvorrat des vollständigen Systems gerade einmal erschöpfen, sie bilden also im Lieschen Sinne eine vollständige Lösung des vollständigen Systems.

Jeder andre Integralverein muß zu einer Punktmannigfaltigkeit gehören, die von Bahnkurven aller infinitesimalen Transformation $\Sigma \chi_k X_k f$ und infolgedessen von Mannigfaltigkeiten M_m erzeugt ist. Den allgemeinsten Integralverein erhalten wir daher, wenn wir ∞^l $(0 \leqq l < n - m)$ beliebige M_m auswählen. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$u_k = \varphi_k(v_1, v_2, \ldots, v_l) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - m),$$

wo die Matrix der φ_k in Bezug auf die v_j den Rang l hat, und bilden die Gleichungen:

$$x_i = \Omega_i(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, \varphi_1(v), \ldots, \varphi_{n-m}(v)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

die immer einen Integralverein bestimmen, wenn wir $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_m t, v_1, \ldots, v_l$ als unabhängige Veränderliche betrachten.

30. Wählen wir insbesondere

$$u_k = \varphi_k(v_1, \ldots, v_{n-m-1}, a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n - m),$$

wo a einen Parameter bezeichnet und wo die φ_k in Bezug auf $v_1, \ldots, v_{n-m-1}, a$ von einander unabhängig sind, so erhalten wir ∞^1 Integralvereine, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeiten $(n-1)$-fach ausgedehnt sind und durch eine Gleichung von der Form $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = a$ darstellbar sind. Dabei ist $X_k \Phi = 0$; also ist Φ eine Lösung des vollständigen Systems.

In dieser Weise erhalten wir alle Lösungen. Es gibt deren $n - m$ von einander unabhängige, und die allgemeinste ist eine willkürliche Funktion von $n - m$ solchen. Ich verweise in dieser Beziehung auf § 2.

31. Es sei schließlich

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{\mu i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n - m) \tag{39}$$

das $(n-m)$-gliedrige Pfaffsche System, das durch Nullsetzen aller $(m+1)$-reihigen Deerminanten der Matrix (18) entsteht. Nach dem Früheren ist klar, daß die Gleichungen (38) die folgenden nach sich ziehen:

$$dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial(\lambda_k t)}\, d(\lambda_k t) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{ji}(\Omega_1, \ldots, \Omega_n) \sum_{k=1}^{m} \Psi_{jk}\, d(\lambda_k t)\,,$$

daß also das Pfaffsche System (39) durch die Substitution (38) identisch befriedigt wird. Die Schar der ∞^{n-m} M_m (38) besteht daher aus lauter m-fach ausgedehnten Integralmannigfaltgkeiten des Pfaffschen Systems (39). Dieses ist demnach unbeschränkt integrabel.

32. Nun gehört umgekehrt zu jedem Pfaffschen Systeme (39) ein kovariantes System von m unabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen, das durch Nullsetzen aller $(n - m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{n-m,1} & \cdots & \gamma_{n-m,n} \end{vmatrix} \tag{40}$$

erhalten wird. Ist das System (39) insbesondere unbeschränkt integrabel, besitzt es also ∞^{n-m} Integral-M_m (38), die den Raum einmal ausfüllen, so werden die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{\mu i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial(\lambda_k t)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n - m;\ k = 1, 2, \ldots, m) \tag{41}$$

bei der Substitution (38) zu lauter Identitäten. Aber die m linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial(\lambda_k t)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{42}$$

stellen zusammen mit (38) die Vereine von ∞^{n-1} Elementen dar, die durch die M_m (38) bestimmt sind. Diese m Gleichungen werden wegen der Identitäten (41) befriedigt, wenn wir setzen:

$$p_i = \sum_{\mu=1}^{n-m} \varrho_\mu \gamma_{\mu i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und zwar in allgemeinster Weise.

Also ist klar, daß die Gleichungen (42) das Verschwinden aller $(n - m + 1)$-reihigen Determinanten der Matrix (40) nach sich ziehen. Mit andern Worten: Die

$\infty^{n-m} M_m$ (38) bestimmen ∞^{n-m} Integralvereine des zu dem Pfaffschen Systeme (39) kovarianten Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen. Das aber ist nur möglich, wenn diese Differentialgleichungen ein m-gliedriges vollständiges System bilden.

§ 7. Anwendung auf endliche kontinuierliche Gruppen.

33. Wir lassen jetzt die Voraussetzung fallen, daß die Gleichungen (16) von einander unabhängig sind, setzen aber immer noch voraus, daß Identitäten von der Form (17) bestehen. Dann sind allerdings die φ_{kjs} im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt; es gibt aber einen besonderen Fall, wo diese Unbestimmtheit nicht eintritt.

Nehmen wir nämlich an, daß die φ_{kjs} in den Identitäten (17) konstant sind, $= c_{kjs}$, so sind sie eindeutig bestimmt, sobald wir noch die Voraussetzung hinzufügen, daß die m Ausdrücke $X_1 f, \ldots, X_m f$ unabhängige infinitesimale Transformationen sind. Wir haben es also dann mit einer m-gliedrigen Gruppe zu tun, die von den infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots, X_m f$ erzeugt ist.

34. Der Rang der Matrix der ξ_{ki} ist in dem vorliegenden Falle $\leqq m$. Ist er gerade $= l \leqq m$, so ist ein Punkt $x_1, \ldots, x_n$ der Gruppe gegenüber von allgemeiner Lage, wenn der Rang der Matrix für ihn nicht $< l$ wird. Wir setzen nicht mehr voraus, daß $x_1^0, \ldots, x_n^0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, sondern nur, daß sich die ξ_{ki} für ihn sämtlich regulär verhalten. Es sei ferner $a_1, \ldots, a_n$ ein Punkt in der Umgebung von x_i^0, also einer, für den sich die ξ_{ki} regulär verhalten; aber auch dieser Punkt braucht nicht von allgemeiner Lage zu sein.

35. Durch den Punkt a_i legen wir jetzt die hindurchgehenden Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ und erhalten eine Mannigfaltigkeit (20), über deren Dimensionenzahl wir nichts Bestimmtes aussagen können. Nur so viel ist sicher, daß sie auf einen Punkt zusammenschrumpfen kann, dann nämlich, wenn für $x_\nu = a_\nu$ alle ξ_{ki} verschwinden.

36. Wir können die in § 4, in Nr. **17** f. gemachten Entwickelungen unmittelbar auf unsre jetzige Mannigfaltigkeit (20) übertragen und stehen wieder vor der Aufgabe, die Ausdrücke U_i in (23) durch geeignete Wahl der $\delta \vartheta_j$ zum Verschwinden zu bringen. Wieder erhalten wir die Gleichungen (24), die erfüllt sein müssen, wenn man die x_i durch die Ausdrücke (20) ersetzt, nur sind jetzt die φ_{kjs} nicht mehr Funktionen der x_i, sondern Konstanten c_{kjs}.

Sollen die $U_i = 0$ sein können, so muß es möglich sein, die Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{m} \xi_{si} \left\{ d\lambda_s - \frac{d}{dt}\, \delta\vartheta_s - \sum_{kj=1}^{m} \lambda_k c_{kjs}\, \delta\vartheta_j \right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

zu befriedigen, und das wird immer erreicht, wenn wir die $\delta \vartheta_s$ aus den Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\, \delta\vartheta_s = d\lambda_s + \sum_{k,j=1}^{m} c_{kjs} \lambda_j\, \delta\vartheta_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{44}$$

bestimmen. Das Verschwinden der U_i ist dann gesichert, wenn wir die Anfangsbedingungen $(\delta \vartheta_s)_{t=0} = 0$ hinzufügen.

Allerdings ist jetzt das Bestehen der Gleichungen (44) zwar hinreichend, um das von (43) zu sichern, aber es ist nicht immer notwendig. Notwendig ist es nur dann, wenn die m infinitesimalen Transformationen

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

auch dann noch unabhängige infinitesimale Transformationen in $x_1, \ldots, x_n$ bleiben, wenn man in $\xi_{ki}(x)$ die Substitution (20) macht. Das aber braucht keineswegs der Fall zu sein. Werden zum Beispiel alle ξ_{ki} für $x_\nu = a_\nu$ gleich Null, so haben die Gleichungen (20) die Form $x_i = a_i$, und die ξ_{ki} verschwinden auch bei der Substitution (20). Die $\delta\vartheta_s$ bleiben dann vollständig unbestimmt.

Da es aber nur darauf ankommt, die Gleichungen $U_i = 0$ zu befriedigen, so ist es gleichgültig, ob die Gleichungen (43) auch noch auf andre Weise erfüllt werden können, als durch Benutzung der Gleichungen (44).

37. Setzen wir wie früher:

$$\delta\vartheta_k = \sum_{j=1}^{m} \psi_{jk}\, d\lambda_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{28}$$

so haben wir für die ψ_{jk} die Differentialgleichungen

$$\frac{d\psi_{js}}{dt} = \varepsilon_{js} + \sum_{\tau,k=1}^{m} c_{k\tau s}\lambda_\tau \psi_{jk} \qquad (j, s = 1, 2, \ldots, m) \tag{45}$$

mit den Anfangsbedingungen $(\psi_{js})_{t=0} = 0$. Führen wir ferner die Ψ_{js} ein, indem wir setzen $\Psi_{js} = t\psi_{js}$, so können wir die aus (20) folgenden Gleichungen

$$dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial(\lambda_k t)}\, d(\lambda_k t)$$

in der Form:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \xi_{ji}\, \delta\tau$$

darstellen, wo die $\mu_i\, \delta\tau$ durch die Gleichungen (33′) bestimmt sind. Da diese Gleichungen nach dem $d(\lambda_k t)$ aufgelöst werden können, ergibt sich, daß jede infinitesimale Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ jeden Punkt der Mannigfaltigkeit (20) in einen unendlich benachbarten Punkt dieser Mannigfaltigkeit überführt.

38. Mit andern Worten: Ist a_i ein Punkt, für den sich die infinitesimalen Transformationen einer m-gliedrigen Gruppe regulär verhalten, und legen wir durch diesen Punkt die hindurchgehenden Bahnkurven aller infinitesimalen Transformationen $\Sigma \lambda_k X_k f$ der Gruppe, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit, die bei jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \mu_k X_k f$ der Gruppe invariant bleibt.

Wir haben hiermit einen neuen Beweis dieses alten Lieschen Satzes.

Gießen, im Juni 1938.

Eingegangen 18. Juni 1938.

Potentialströmungen in Kanalsystemen.

Von *Ernst Graeser* in Göttingen.

1. Wir konstruieren uns in folgender Weise in einer w-Ebene ein Kanalsystem: Vom Punkt 0 aus zeichnen wir — mit der Halbachse des positiv Reellen beginnend — $2n$ Halbgeraden in durchaus regelmäßiger Anordnung, $n \geqq 2$; in Figur 1 ist $n = 3$ gewählt. Symmetrisch zur ersten, dritten, fünften, . . ., $(2n-1)$-ten Halbgeraden (die Numerierung erfolge im positiven Drehsinn) zeichnen wir je einen aus dem Unendlichen kommenden geradlinigen Parallelkanal der Breite $2a$ und symmetrisch zur zweiten, vierten, sechsten, . . ., $2n$-ten Halbgeraden konstruieren wir je einen aus dem Unendlichen kommenden geradlinigen Parallelkanal der Breite $2b$. Wir führen die geradlinigen Begrenzungen der Kanäle bis zu den Schnittpunkten (E), die durch je zwei aufeinanderfolgende Kanalwände der beiden Kanalsorten entstehen; diese liegen auf einem Kreis um 0 vom Radius

$$R = \frac{a}{\sin \alpha}, \text{ wobei } \operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \frac{\pi}{n}}{b + a \cos \frac{\pi}{n}}.$$

Die einzelnen Kanäle des so gebildeten Kanalsystems bezeichnen wir in Einklang mit der oben erfolgten Numerierung als $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_\nu, \ldots, K_{2n}$. Sind die für die beiden Kanalarten maßgebenden Breiten a und b einander gleich, so haben wir ein durchaus regelmäßiges System von $2n$ Kanälen. Der Fall eines aus einer ungeraden Anzahl von lauter gleich breiten Kanälen nach obigem Muster aufgebauten Kanalsystems ist in den in dieser Arbeit gemachten Ausführungen enthalten.

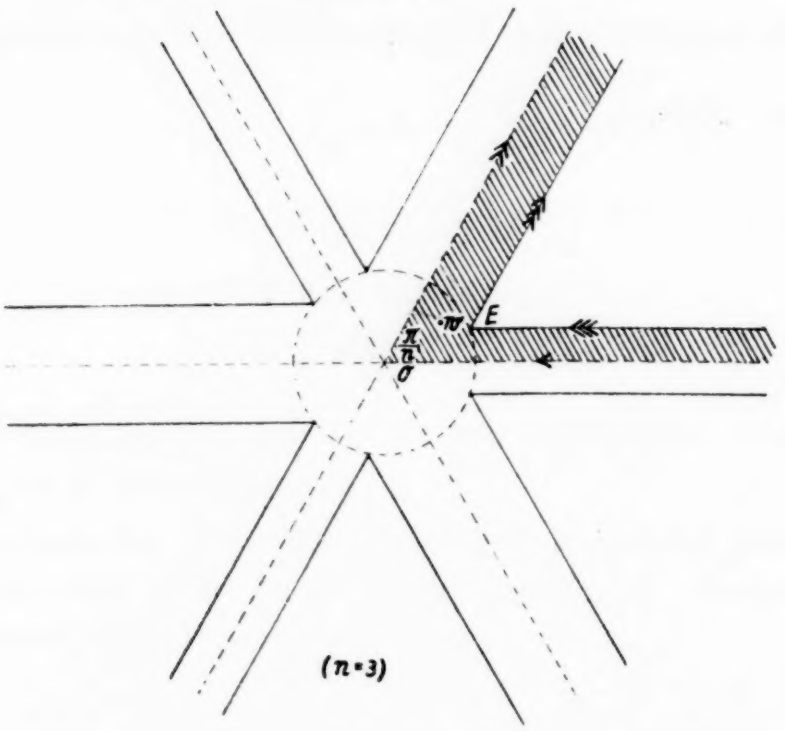


Fig. 1.

2. Wir wollen nun *die allgemeinsten in dem oben konstruierten Kanalsystem erfolgenden Potentialströmungen — ohne und mit Singularitäten im Innern des Kanalsystem-Bereiches* — bestimmen.

Wir geben für jeden Kanal K_ν des Systems die Schnelligkeit v_ν vor, mit der die strömende Substanz in K_ν aus dem Unendlichen zufließen oder im Unendlichen abfließen soll, wobei wir v_ν im Falle des Zufließens positiv und im Falle des Abfließens negativ wählen und nur dafür sorgen müssen, daß wegen des besonderen Charakters einer Potentialströmung

$$(1) \qquad av_1 + bv_2 + av_3 + bv_4 + \cdots + \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} v_\nu + \cdots + bv_{2n} = 0 \quad \begin{pmatrix} a \text{ für } \nu \text{ ungerade} \\ b \text{ für } \nu \text{ gerade} \end{pmatrix}$$

erfüllt sein muß. (Wenn also z. B. in den Kanälen $K_1, K_2, \ldots, K_{2n-1}$ Zufluß aus dem Unendlichen mit gegebenen Schnelligkeiten $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}$ (positive Werte) stattfinden soll, so muß im Kanal K_{2n} ein Abfließen ins Unendliche mit einer ganz bestimmten Schnelligkeit erfolgen; für v_{2n} ergibt sich dann aus (1) ein ganz bestimmter negativer Wert.) Wir fragen nach der mathematischen Herstellung der allgemeinsten Potentialströmung der oben genannten Art, zunächst unter der Voraussetzung, daß die Strömung an allen inneren Stellen des Kanalsystems durchaus regulär verlaufe, und sodann im Falle, daß im Inneren des Kanalsystems an gegebenen Stellen Singularitäten (Wirbel, Dipole, Quellen, Senken) vorgeschriebener Art liegen.

3. Wir reduzieren dieses Problem auf die Aufgabe, in einer Halbebene allgemeinste Potentialströmungen einer gewissen gegebenen Natur herzustellen, indem wir die konforme Abbildung des Innern des Kanalsystem-Bereichs der w-Ebene auf eine obere z-Halbebene bewerkstelligen. Zur Lösung dieser Abbildungsaufgabe bedenken wir, daß wir unseren Kanalsystem-Bereich mittels eines Spiegelungsprozesses aus dem in Figur 1 schraffierten Sektor aufbauen können; es wird an den mit einem bzw. mit zwei Pfeilen gekennzeichneten Randstücken des Sektors gespiegelt und der Spiegelungsprozeß sodann für deren Bilder entsprechend weitergeführt. Insbesondere geht bei einer solchen Spiegelung stets der ganze Kanalsystem-Bereich in sich über. In der oberen z-Halbebene — als Bild des Kanalsystem-Bereichs — müssen demnach den zur Spiegelung benutzten Halbgeraden der w-Ebene Orthogonalkreisbogen bezüglich der Achse des Reellen entsprechen [1]). Da die verlangte konforme Abbildung auf die z-Halbebene bis auf eine lineare Transformation der Halbebene in sich bestimmt ist, können wir nach den soeben gemachten Feststellungen die Abbildung so einrichten, daß der in Figur 1 schraffierte Sektor in das in Figur 2 schraffierte Dreieck übergeführt wird, welches von einem Stück der Achse des Imaginären, einem Stück der Achse des Reellen und einem zur letzteren orthogonalen Kreisbogen begrenzt wird, der im Punkte i den Winkel $\frac{\pi}{n}$ mit der Achse des Imaginären bildet. Die Ränderzuordnung ist in den Figuren durch die verschiedenen Pfeile gekennzeichnet. Es genügt nach dem oben Gesagten, *die konforme Abbildung des schraffierten Sektors* (Figur 1) *auf das schraffierte Kreisbogendreieck* (Figur 2) *zu bewerkstelligen*; analytische Fortsetzung der Abbildungsfunktion führt dann nach dem Spiegelungsprinzip zur gewünschten konformen Abbildung des ganzen Kanalsystem-Bereichs auf die obere Halbebene.

4. Zur Durchführung der nunmehr reduzierten Abbildungsaufgabe bilden wir zunächst den schraffierten Sektor der w-Ebene durch die Umkehrungsfunktion eines

[1]) Ein Kurvenstück in der oberen z-Halbebene, welches so beschaffen ist, daß bei Spiegelung an ihm die Halbebene in sich übergeht, muß nach elementaren funktionentheoretischen Sätzen ein zur Achse des Reellen orthogonaler Kreisbogen sein.

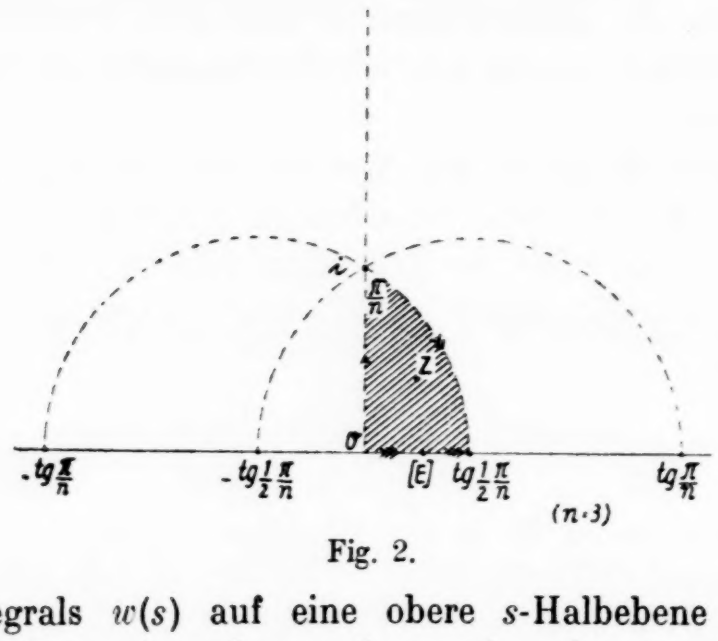


Fig. 2.

Polygonabbildungsintegrals $w(s)$ auf eine obere s-Halbebene ab. Diese Abbildung nehmen wir so vor, daß $s = 1$ nach $w = 0$, $s = 0$ und $s = \infty$ nach $w = \infty$ und eine noch zu bestimmende Stelle $s = -\varrho$ (ϱ positiv reell) in den durch die einspringende Ecke gegebenen Punkt E mit den Koordinaten $R\cos\alpha$, a transformiert wird. Wegen der an den einzelnen Stellen vorzunehmenden Winkelabänderung muß daher, wenn wir $1 - \frac{1}{n}$ mit λ bezeichnen, $w(s)$ so aussehen:

$$w = \gamma \int_1^s \left(\frac{s+\varrho}{s-1}\right)^{\lambda} \frac{ds}{s},$$

wobei γ eine positiv reelle Konstante ist.

Die Bestimmung der Konstanten γ und ϱ ergibt sich sofort — *unabhängig von dem in unserem Falle vorliegenden Rationalsein von* λ — auf folgende einfache Weise: Im Unendlichen hat $w(s)$ das Verhalten $\gamma \log s +$ reguläre Funktion. Laufen wir auf einem genügend großen Halbkreis mit 0 als Mittelpunkt in der oberen Halbebene von einem Punkt der Halbachse des positiv Reellen bis zu der entsprechenden Stelle der Halbachse des negativ Reellen, so ändert sich $w(s)$ um die additiv hinzukommende Größe $i\gamma\pi$, es ist also $\gamma = \frac{a}{\pi}$. Bei $s = 0$ hat $w(s)$ das Verhalten

$$\gamma\varrho^{\lambda}\frac{1}{(-1)^{\lambda}}\log s + \text{reguläre Funktion} = \gamma\varrho^{\lambda}e^{-i\pi\lambda}\log s + \text{reguläre Funktion}.$$

Laufen wir auf einem genügend kleinen Halbkreis im positiven Sinne um $s = 0$ von einem Punkt der Halbachse des positiv Reellen zu dem entsprechenden Punkt der Halbachse des negativ Reellen, so ändert sich $w(s)$ um die additive Konstante $\gamma\varrho^{\lambda}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}\pi$. Es ist also $\gamma\varrho^{\lambda}\pi = b$, d. h. mit Berücksichtigung von $\gamma = \frac{a}{\pi}$ finden wir $\varrho = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$. Demnach bekommen wir:

$$(2) \qquad w(s) = \frac{a}{\pi}\int_1^s \left(\frac{s + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{s-1}\right)^{\lambda}\frac{ds}{s} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{n}.$$

Unser Integral läßt sich, weil λ in unserem Falle rational ist, nach Einführung der uniformisierenden Variablen $\sqrt[n]{\frac{s+\varrho}{s-1}} = t$ in der Form

$$(2a)\qquad w=\frac{a}{\pi}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}+1\right)n\int_{\infty}^{t}\frac{t^{2n-2}}{(1-t^n)\,(\varrho+t^n)}\,dt,\qquad \varrho=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

schreiben und mittels Partialbruchzerlegung elementar ausrechnen. Z. B. hat im Falle $n=2$ das Integral den Wert

$$(2b)\qquad w=\frac{a}{\pi}\left[\log\frac{1+t}{1-t}+i\sqrt{\varrho}\log\frac{t-i\sqrt{\varrho}}{t+i\sqrt{\varrho}}\right]+ai \text{ mit } t=\sqrt{\frac{s+\varrho}{s-1}} \text{ und } \varrho=\left(\frac{b}{a}\right)^{2}.$$

Nach der mittels (2) geleisteten konformen Abbildung des schraffierten Sektors der w-Ebene auf die obere s-Halbebene nehmen wir durch die Kette der konformen Übertragungen

$$\Omega=\sqrt{s}\ \text{(Hauptwert)},\qquad \zeta=\frac{\Omega-1}{\Omega+1},\qquad Z=\zeta^{\frac{1}{n}},\qquad z=i\frac{1-Z}{1+Z},$$

also durch

$$(3)\qquad z=i\,\frac{1-\left(\dfrac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}\right)^{\frac{1}{n}}}{1+\left(\dfrac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

die Abbildung auf das schraffierte Dreieck der Figur 2 vor. *Die Umkehrungsfunktion $s(w)$ aus* (2) *und die darauf folgende Transformation* (3) *lösen unser Abbildungsproblem: Schraffierter Sektor der w-Ebene → schraffiertes Kreisbogendreieck der z-Ebene! vollständig.*

5. Die Abbildungsfunktion für die umgekehrte Aufgabe lautet:

$$(4)\qquad w=(-1)^n\frac{8na}{\pi}\,i\int_{i}^{z}\left[\frac{\left(1+\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^n\right)^2+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\left(\dfrac{1+\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^n}{1-\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^n}\right)^2-1}\right]^{\lambda}\frac{(1+z^2)^{n-1}}{(i+z)^{2n}-(i-z)^{2n}}\,dz,$$

mit $\lambda=1-\dfrac{1}{n}$.

Dieses Integral läßt sich elementar berechnen, indem wir es, von der Gestalt (2) ausgehend, in der Schreibweise (2a) mittels Partialbruchzerlegung behandeln und in die sich ergebende Funktion von $t=\sqrt[n]{\dfrac{s+\varrho}{s-1}}$ mit $\varrho=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ gemäß (3)

$$s=\left(\frac{1+\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^n}{1-\left(\dfrac{i-z}{i+z}\right)^n}\right)^2$$

einführen. Z. B. hat im Falle $n=2$ das Integral den in (2b) notierten Wert, in welchem $s=-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)^2$ einzusetzen ist.

6. Die Unendlichpunkte der Kanäle

$$K_1,\ K_2,\ K_3, \ldots, K_{n+1}, \ldots, K_\nu, \ldots, K_{2n-1},\ K_{2n}$$

liefern in der z-Ebene, wie man sofort elementargeometrisch sieht, auf der Achse des Reellen die Stellen

$$0,\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\frac{\pi}{n},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}2\frac{\pi}{n}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{1}{2}n\frac{\pi}{n}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\nu-1)\frac{\pi}{n}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{1}{2}(2n-2)\frac{\pi}{n},\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}(2n-1)\frac{\pi}{n},$$

also:

$$0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n},\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}, \ldots, \operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n}=\infty, \ldots, \operatorname{tg}\frac{(\nu-1)\pi}{2n}, \ldots, -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n},\ -\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}.$$

Das eingangs formulierte Strömungsproblem ist nun vermöge der durch $z(w)$ geleisteten konformen Abbildung auf die Untersuchung von gewissen in der oberen z-Halbebene erfolgenden Potentialströmungen reduziert. Rückübertragung mittels $w(z)$ liefert dann die gesuchten Strömungen in unserem Kanalsystem. Es sei $\tilde{S}(w)$ der problematische Ausdruck für eine Potentialströmung der oben verlangten Art in unserem Kanalsystem. $-\overline{\left(\frac{d\tilde{S}(w)}{dw}\right)} = \mathfrak{V}(w)$ stellt den Geschwindigkeitsvektor dar. Mittels konformer Überpflanzung durch $w(z)$:

$$\tilde{S}(w) = \tilde{S}(w(z)) = S(z) \tag{5}$$

ergibt sich die Strömungsfunktion für die entsprechende in der oberen Halbebene erfolgende Potentialströmung. Es ist

$$\frac{d\tilde{S}(w)}{dw} = \frac{dS(z)}{dz}\frac{dz}{dw}, \tag{6}$$

wobei $-\overline{\left(\frac{dS(z)}{dz}\right)} = \mathfrak{V}(z)$ der Geschwindigkeitsvektor an der Bildstelle z ist. Für jede innere Stelle des Kanalsystembereichs, an der die verlangte Strömung regulär verläuft — wir wollten zunächst das Innere des Kanalsystembereichs als frei von Singularitäten annehmen —, liefert wegen des daselbst regulären Charakters von $\tilde{S}(w)$ auch $S(z)$ — an der betreffenden Bildstelle — eine reguläre Potenzreihenentwicklung. Da $\tilde{S}(w)$ an den Randstücken des Kanalsystembereichs exklusive der Unendlichpunkte und der einspringenden Ecken E regulär sein muß (falls nicht künstlich auf glatten Randstücken Singularitäten angebracht werden) so muß sich auch $S(z)$ auf der Achse des Reellen der z-Ebene bis auf die noch näher zu untersuchenden Bildstellen der genannten Unendlichpunkte und E-Punkte regulär verhalten.

Falls wir in den Ecken E nicht besondere Singularitäten vorgeben, wird — trotz des in diesem Falle (nach elementaren Überlegungen) [2]) im allgemeinen möglichen Unendlichwerdens der Größe $\frac{d\tilde{S}(w)}{dw}$ von der Art $\frac{\text{Konst.}}{(w-E)^{(n-1)/(2n-1)}}$ — $S(z)$ an den Bildstellen von E regulär. Wir haben also nur noch die Bildstellen der Unendlichpunkte des Kanalsystembereiches zu untersuchen; diese werden die einzigen Singularitäten für die problematische Funktion $S(z)$ auf der Achse des Reellen der z-Ebene liefern.

7. Auf der Achse des Reellen ist $\mathfrak{V}(z)$ und damit auch $\frac{dS(z)}{dz}$ durchaus reellwertig. Das Spiegelungsprinzip lehrt dann, daß die in der oberen Halbebene eindeutige [3])

[2]) S. etwa E. Graeser, Anwendung der Funktionentheorie auf die Theorie der Profilströmungen und damit zusammenhängende Probleme der konformen Abbildung, Deutsche Mathematik **1** (1936), S. 826.

[3]) Monodromiesatz.

Funktion $\frac{dS(z)}{dz}$ eine in der vollen z-Ebene eindeutige Funktion ist und deshalb an der Bildstelle $e_\nu = \operatorname{tg}\frac{(\nu-1)\pi}{2n}$ des Unendlichpunktes des Kanals K_ν jedenfalls eine Laurententwicklung

$$(7)\qquad \frac{dS(z)}{dz} = \cdots + \frac{\delta_{-\varkappa}}{(z-e_\nu)^\varkappa} + \cdots + \frac{\delta_{-1}}{z-e_\nu} + \delta_0 + \delta_1(z-e_\nu) + \delta_2(z-e_\nu)^2 + \cdots$$

haben muß; im Falle $\nu = n+1$, d. h. falls $e_\nu = \infty$ ist, wird insbesondere

$$(7a)\qquad \frac{dS(z)}{dz} = \cdots + \Delta_{-\varkappa} z^\varkappa + \cdots + \Delta_{-1} z + \Delta_0 + \Delta_1 \frac{1}{z} + \Delta_2 \frac{1}{z^2} + \cdots$$

Nach den Forderungen des Problems muß im Kanal K_ν ein Zufließen aus dem Unendlichen oder Abfließen ins Unendliche mit der Schnelligkeit v_ν stattfinden, wobei wir v_ν im Falle des Zufließens als positive und im Falle des Abfließens als negative reelle Zahl vorzugeben haben. Der im Unendlichpunkt des Kanals K_ν der Breite 2β ($\beta = a$ falls ν ungerade, $\beta = b$ falls ν gerade) vorhandene Geschwindigkeitsvektor hat den Wert:

$$(8)\qquad \mathfrak{V}_{w=\infty,\,K_\nu}(w) = -\overline{\left(\frac{d\tilde{S}(w)}{dw}\right)}_{w=\infty,\,K_\nu} = -e^{i(\nu-1)\frac{\pi}{n}} v_\nu .$$

Diese Tatsache benutzen wir jetzt, um mit Hilfe der Gleichung (6) die Koeffizienten in der obigen Laurententwicklung (7) bzw. (7a) zu bestimmen. Zunächst bemerken wir: Da der Unendlichpunkt des Kanals K_ν bei Abbildung mittels $z(w)$ in die Stelle e_ν und dementsprechend eine in der oberen z-Halbebene gelegene Halbumgebung der Stelle $z = e_\nu$ in das im Kanal K_ν gelegene Stück einer Umgebung des Punktes $w = \infty$ übergeht, muß $w(z)$ bei $z = e_\nu$ eine Entwicklung

$$(9)\qquad w = \frac{2\beta}{\pi} e^{-i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} \log(z-e_\nu) + \text{ reguläre Potenzreihe in } (z-e_\nu)\ ^4)$$

besitzen; insbesondere gilt im Falle $\nu = n+1$, d. h. falls $e_\nu = \infty$ ist, eine Entwicklung

$$(9a)\qquad w = \frac{2\beta}{\pi}(-\log z) + \text{ reguläre Potenzreihe in } \frac{1}{z}.$$

---

[4]) Ohne von dem analytischen Ausdruck (4) für $w(z)$ Gebrauch zu machen, können wir nämlich so sagen: Das Unendliche des Kanals K_ν der Breite 2β (s. oben!) wird durch $e^{w\frac{\pi}{2\beta}e^{i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)}} = \sigma$ auf die Halbumgebung der Stelle $\sigma = 0$ abgebildet und diese wird sodann notwendigerweise mittels einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$\sigma = c_1(z-e_\nu) + c_2(z-e_\nu)^2 + \cdots,\ c_1 \neq 0,$$

auf eine in der oberen z-Halbebene gelegene Halbumgebung von $z = e_\nu$ konform übertragen. Es ist

$$w = \frac{2\beta}{\pi} e^{-i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} \log\sigma$$

und

$$\log\sigma = \log(z-e_\nu) + \log c_1 + c_2'(z-e_\nu) + c_3'(z-e_\nu)^2 + \cdots,$$

woraus sofort die obige Entwicklung (9) folgt. Im Falle $\nu = n+1$, d. h. für $e_\nu = \infty$, tritt natürlich an die Stelle der soeben für σ gültig gewesenen Potenzreihenentwicklung eine Entwicklung der Form

$$\sigma = C_1\frac{1}{z} + C_2\frac{1}{z^2} + C_3\frac{1}{z^3} + \cdots,\ C_1 \neq 0;$$

hieraus ergibt sich

$$\log\sigma = -\log z + \log C_1 + C_2'\frac{1}{z} + C_3'\frac{1}{z^2} + \cdots$$

und demnach für $w = \frac{2\beta}{\pi}\log\sigma$ sofort die Entwicklung (9a).

Aus (9) folgt:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{2\beta}{\pi} e^{-i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} \frac{1}{z-e_\nu} + \text{reguläre Potenzreihe in } (z-e_\nu)$$

$$= \frac{1}{z-e_\nu} \frac{2\beta}{\pi} e^{-i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} (1 + (z-e_\nu) \cdot \text{reguläre Potenzreihe in } (z-e_\nu)),$$

also

$$(10) \quad \frac{dz}{dw} = (z-e_\nu) \frac{\pi}{2\beta} e^{i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} (1 + d_1(z-e_\nu) + d_2(z-e_\nu)^2 + \cdots);$$

entsprechend folgt im Falle $\nu = n+1$, d. h. falls $e_\nu = \infty$ ist, aus (9a)

$$(10a) \qquad \frac{dz}{dw} = -z \frac{\pi}{2\beta} \left(1 + D_1 \frac{1}{z} + D_2 \frac{1}{z^2} + \cdots\right).$$

Die Größe $\frac{d\tilde{S}(w)}{dw} = \frac{dS(z)}{dz} \frac{dz}{dw}$ muß nach (8) im Punkte $w = \infty$, K_ν, d. h. bei $z = e_\nu$.

den Wert $e^{-i(\nu-1)\frac{\pi}{n}} v_\nu$ haben; nach (7) und (10) kann aber

$$\frac{dS(z)}{dz} \frac{dz}{dw} =$$

$$\left(\cdots + \frac{\delta_{-\varkappa}}{(z-e_\nu)^{\varkappa-1}} + \cdots + \delta_{-1} + \delta_0(z-e_\nu) + \delta_1(z-e_\nu)^2 + \cdots\right) \frac{\pi}{2\beta} e^{i\left(\pi-(\nu-1)\frac{\pi}{n}\right)} (1 + d_1(z-e_\nu) + \cdots)$$

für $z = e_\nu$ nur dann diesen endlichen vorgeschriebenen Wert haben, wenn die $\delta_{-\varkappa}$ sämtlich gleich Null sind außer δ_{-1}, und zwar muß $\delta_{-1} = -\frac{2\beta}{\pi} v_\nu$ sein. Falls $\nu = n+1$, d. h. $e_\nu = \infty$ ist, muß die Größe $\frac{dS(z)}{dz} \frac{dz}{dw}$ im Punkte $w = \infty$, K_{n+1}, d. h. bei $z = \infty$, den Wert $-v_{n+1}$ haben; nach (7a) und (10a) kann aber

$$\frac{dS(z)}{dz} \frac{dz}{dw} =$$

$$-\left(\cdots + \Delta_{-\varkappa} z^{\varkappa+1} + \cdots + \Delta_{-1} z^2 + \Delta_0 z + \Delta_1 + \Delta_2 \frac{1}{z} + \cdots\right) \frac{\pi}{2\beta} \left(1 + D_1 \frac{1}{z} + D_2 \frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

für $z = \infty$ nur dann diesen endlichen vorgeschriebenen Wert haben, wenn Δ_0 und sämtliche Größen $\Delta_{-\varkappa}$ gleich Null sind; es muß $\Delta_1 = \frac{2\beta}{\pi} v_{n+1}$ sein. Demnach muß die Entwicklung von $\frac{dS(z)}{dz}$ an den Stellen z_ν so aussehen:

$$(11) \quad \frac{dS(z)}{dz} = \frac{-\frac{2\beta}{\pi} v_\nu}{z-e_\nu} + \delta_0 + \delta_1(z-e_\nu) + \delta_2(z-e_\nu)^2 + \cdots, \text{ falls } \nu \neq n+1;$$

$$(11a) \quad \frac{dS(z)}{dz} = \frac{\Delta_1}{z} + \frac{\Delta_2}{z^2} + \cdots, \text{ falls } \nu = n+1 \left(\text{d. h. } \frac{dS(z)}{dz} = 0 \text{ für } z = \infty\right).$$

Die — wie bereits bemerkt — in der z-Ebene eindeutige Funktion $\frac{dS(z)}{dz}$ hat also überall reguläres Verhalten bis auf die auf der Achse des Reellen gelegenen Stellen e_ν ($\nu \neq n+1$), wo sie je einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\frac{2\beta}{\pi} v_\nu$ hat.

$\frac{dS(z)}{dz}$ ist also eine rationale Funktion und bis auf eine additive Konstante bereits durch die Summe der Hauptteile: $\sum \frac{-\frac{2\beta}{\pi} v_\nu}{z - e_\nu}$ gegeben; da diese Summe im Unendlichen verschwindet, muß wegen (11a) jene additive Konstante gleich Null sein, und demnach ist:

$$\frac{dS(z)}{dz} = \sum \frac{-\frac{2\beta}{\pi} v_\nu}{z - e_\nu},$$

d. h.

$$S(z) = -\frac{2}{\pi} \sum \beta v_\nu \log (z - e_\nu) + \text{Konst.}$$

8. Ausführlich geschrieben besagt dies für die problematische, in unserem Kanalsystem in der geforderten Art — im Innern singularitätenfrei — erfolgende Potentialströmung:

Die Geschwindigkeitsverteilung ist — nach Übertragung in die z-Ebene — gegeben durch $\mathfrak{B}(z) = -\left(\overline{\frac{dS(z)}{dz}}\right)$ *mit*

$$(12)\quad \frac{dS(z)}{dz} = \frac{-2\frac{a}{\pi} v_1}{z} + \frac{-2\frac{b}{\pi} v_2}{z - e_2} + \frac{-2\frac{a}{\pi} v_3}{z - e_3} + \cdots + \frac{-2\frac{\binom{a}{b}}{\pi} v_\nu}{z - e_\nu} + \cdots + \frac{-2\frac{a}{\pi} v_{2n-1}}{z + e_3} + \frac{-2\frac{b}{\pi} v_{2n}}{z + e_2},$$

wobei $e_\nu = \operatorname{tg} \frac{(\nu - 1)\pi}{2n}$ *und* $\binom{a}{b} = \begin{matrix} a, & \textit{falls } \nu \textit{ ungerade}, \\ b, & \textit{falls } \nu \textit{ gerade}. \end{matrix}$

Dementsprechend lautet die Strömungsfunktion nach Übertragung in die z-Ebene:

$$(13)\quad S(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

$$= -2\frac{a}{\pi} v_1 \log z - 2\frac{b}{\pi} v_2 \log (z - e_2) - 2\frac{a}{\pi} v_3 \log (z - e_3) - \cdots - 2\frac{\binom{a}{b}}{\pi} v_\nu \log (z - e_\nu) - \cdots - 2\frac{a}{\pi} v_{2n-1} \log (z + e_3) - 2\frac{b}{\pi} v_{2n} \log (z + e_2) + \text{Konst.}$$

Das ν-te Glied stellt eine Quell- oder Senkenströmung dar mit der Ergiebigkeit $4\binom{a}{b} v_\nu$ im Punkte e_ν, je nachdem ob im Kanal K_ν ein Zufließen aus dem Unendlichen oder Abfließen ins Unendliche erfolgt, je nachdem also v_ν positiv oder negativ vorgegeben ist. Alle Auswirkungen irgendwelcher Vorgaben der Zufluß- oder Abflußgeschwindigkeit für die einzelnen Kanäle auf unsere Kanalsystemströmung können wir in der oberen z-Halbebene übersehen und das Geschwindigkeitsfeld durch Addition der von den Quell- oder Senkenströmungen herrührenden Geschwindigkeitsvektoren konstruieren. Als Stromlinien $V(x, y) = \text{konst.}$ bekommen wir nach (13) die Kurven

$$(13\text{a})\quad -\frac{2a}{\pi} v_1 \arg z - \frac{2b}{\pi} v_2 \arg(z - e_2) - \frac{2a}{\pi} v_3 \arg(z - e_3) - \cdots - 2\frac{\binom{a}{b}}{\pi} v_\nu \arg(z - e_\nu) - \cdots - \frac{2a}{\pi} v_{2n-1} \arg(z + e_3) - \frac{2b}{\pi} v_{2n} \arg(z + e_2) = \text{konst.}$$

Insbesondere möchten wir noch auf einen Umstand aufmerksam machen: Nach (11a) und den vorhergehenden Überlegungen hat der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ der Entwicklung von $\frac{dS(z)}{dz}$ für die Umgebung des Punktes ∞ den Wert $\Delta_1 = \frac{2\binom{a}{b}}{\pi} v_{n+1}$; nach (12) bekommen wir für diesen Koeffizienten:

$$-\frac{2a}{\pi} v_1 - \frac{2b}{\pi} v_2 - \frac{2a}{\pi} v_3 - \cdots - \frac{2\binom{a}{b}}{\pi} v_\nu - \cdots - 2\frac{a}{\pi} v_{2n-1} - 2\frac{b}{\pi} v_{2n}.$$

Diese beiden Werte müssen einander gleich sein, also ist

$$av_1 + bv_2 + av_3 + \cdots + \binom{a}{b} v_\nu + \cdots + \binom{a}{b} v_{n+1} + \cdots + av_{2n-1} + bv_{2n} = 0;$$

damit haben wir nochmals die eingangs notierte Bedingung (1) exakt erhalten.

9. Wir wollen nun noch auf folgenden Spezialfall hinweisen: *Die strömende Substanz möge in den Kanälen der Breite 2a — aus dem Unendlichen kommend — mit ein und derselben Schnelligkeit v_a zufließen und in den Kanälen der Breite 2b nach Unendlich mit ein und derselben, sich nach obiger Bedingung als $v_b = -\frac{a}{b} v_a$ ergebenden Schnelligkeit abfließen.*

Die in die z-Ebene übertragene Potentialströmung heißt dann:

$$S(z) = -\frac{2a}{\pi} v_a (\log z - \log (z - e_2) + \log (z - e_3) + \cdots \pm \log (z - e_\nu) + \cdots + \log (z + e_3) - \log (z + e_2)) + \text{Konst.}$$

(+, falls ν ungerade; —, falls ν gerade),

und die für das Geschwindigkeitsfeld maßgebende Größe hat den Wert

$$\frac{dS(z)}{dz} = -\frac{2a}{\pi} v_a \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - e_2} + \frac{1}{z - e_3} + \cdots \pm \frac{1}{z - e_\nu} + \cdots + \frac{1}{z + e_3} - \frac{1}{z + e_2}\right).$$

Es ergibt sich durch elementare Überlegung, daß diese Strömung bei $z = i$ einen Staupunkt der Ordnung $n - 1$ aufweist und die von i nach e_ν geführten (in Figur 2 gestrichelt gezeichneten) Orthogonalkreisbogen als „singuläre" Stromlinien hat. Nach Rückübertragung in den Kanalsystembereich der w-Ebene heißt das: Die Strömung erfolgt in unserem Kanalsystem derart symmetrisch, daß sie aus lauter lediglich in den Sektoren der Figur 1 stattfindenden Strömungen besteht; insbesondere liegt bei $w = 0$ ein Staupunkt der Ordnung $n - 1$. Dieser in dem betrachteten Spezialfall sich ergebende Aufbau der Kanalsystem-Strömung aus lauter Sektorströmungen erscheint auch anschauungsgemäß als plausibel. Wir bekommen — ohne über die obere z-Halbebene zu gehen — durch die Kette der Abbildungen $s(w)$ (aus (2)), $\frac{C}{\pi} \log s = \sigma$ (Hauptwert), $\sqrt[n]{\sigma} = \tau$ die in der τ-Ebene erfolgende Staupunktströmung $\hat{S}(\tau) = \tau^n$ (siehe Figur 3), die durch die Stromlinien $V = C = \pm av_a$ abgegrenzt erscheint.

10. Durch Betrachtung des genannten Spezialfalles unserer Kanalsystemströmung haben wir nebenbei den *Fall der Potentialströmung in einem Sektor der beschriebenen Art mit den Spitzenwinkel $\pi \frac{1}{n}$ erhalten.* Die bereits notierte Abbildungskette $s(w)$ (aus (2)) und $\frac{C}{\pi} \log s = \sigma$ (Hauptwert) liefert aber auch im Falle eines nicht rationalen Bruchteils μ

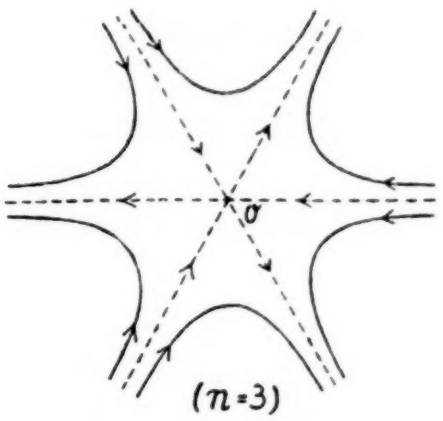


Fig. 3.

von π, d. h. für $\lambda = 1 - \mu$ (siehe (2)) nicht rational, die Abbildung eines solchen Sektors auf einen von der Achse des Reellen und der durch den Punkt iC gehenden parallelen Geraden begrenzten Streifen; wir erinnern daran, daß wir in Nr. 4 bei Bestimmung der in $w(s)$ auftretenden Konstanten γ und ϱ ausdrücklich bemerkten, daß unsere Methode der Konstantenbestimmung unabhängig von dem damals zur Diskussion stehenden Falle des Rationalseins von λ ist. Hiermit ist also auch nebenbei *das spezielle Problem der Potentialströmungen in einem Sektor gelöst, wenn der Spitzenwinkel ein nicht rationaler Teil von π ist*[5]).

11. Bisher hatten wir uns bei Behandlung der allgemeinen Kanalsystemströmungen nur mit im Inneren des Kanalsystembereichs singularitätenfrei erfolgenden Strömungen befaßt. Der Fall, daß *im Bereichinneren Singularitäten vorgegeben* sind, läßt sich nach Übertragung in die obere z-Halbebene auch sofort erledigen. Wir geben jetzt einmal gewisse Singularitäten für unsere problematische Strömungsfunktion im Innern des Kanalsystembereichs vor und behandeln diesen Fall ausführlich. Jeder sonstige mögliche allgemeinere Fall läßt sich dann an Hand dieses Beispiels ohne Schwierigkeiten erledigen.

Wir denken uns z. B. im Inneren des Kanalsystembereichs der w-Ebene folgende Singularitäten gegeben:

1) an der Stelle z_0 liege ein Wirbel der Stärke 2π,
2) an der Stelle z_* liege ein Dipol mit gegebener Achsenrichtung (ψ),
3) an der Stelle z_1 liege eine Senke der „Ergiebigkeit" 2π und an der Stelle z_2 liege eine Quelle der Ergiebigkeit 2π.

Die problematische Strömungsfunktion $\tilde{S}(w)$ für den Kanalsystembereich liefert nach konformer Überpflanzung in die obere z-Halbebene eine Funktion $S(z)$ als Strömungsfunktion für die übertragene Strömung. Jedenfalls muß $\frac{dS(z)}{dz}$ zunächst einmal die bereits früher festgestellten Pole erster Ordnung haben (siehe Gleichung (12)). Außerdem bemerken wir: Da $S(z)$ wegen 1), 2), 3) an den betreffenden singulären Stellen das Verhalten

1′) $S(z) = i \log (z - z_0) +$ reguläre Funktion,

2′) $S(z) = \frac{ce^{i\psi}}{z - z_*} +$ reguläre Funktion,

3′) $S(z) = \log \frac{z - z_1}{z - z_2} +$ reguläre Funktion

haben muß, folgt für $\frac{dS(z)}{dz}$ bei z_0 bzw. z_* bzw. z_1 und z_2 das Verhalten:

---

[5]) In einer Arbeit von H. F. Roßbach, Über eine ebene Potentialströmung, Monatshefte f. Math. u. Phys. **45** (1937), 343—350, wird dieses spezielle Problem in dem Falle gelöst, daß der Spitzenwinkel ein rationaler Teil von π ist, indem für den dort betrachteten Ausdruck zur Konstantenbestimmung ein Verfahren angewendet wird, daß im Falle eines nicht als rationaler Teil von π gegebenen Spitzenwinkels nicht zum Ziele führen kann.

1'') $\dfrac{dS(z)}{dz} = \dfrac{i}{z - z_0} +$ reguläre Funktion,

2'') $\dfrac{dS(z)}{dz} = -\dfrac{ce^{i\psi}}{(z - z_*)^2} +$ reguläre Funktion,

3'') $\dfrac{dS(z)}{dz} = \dfrac{1}{z - z_1} - \dfrac{1}{z - z_2} +$ reguläre Funktion.

Da der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{V}(z) = -\left(\overline{\dfrac{dS(z)}{dz}}\right)$ und damit auch $\dfrac{dS(z)}{dz}$ auf der Achse des Reellen durchaus reellwertig sein muß, folgt nach dem Spiegelungsprinzip, daß $\dfrac{dS(z)}{dz}$ auch an den konjugierten Stellen entsprechende Pole haben muß; also tritt zu dem Glied $\dfrac{i}{z - z_0}$ automatisch das Glied $-\dfrac{i}{z - \bar{z}_0}$, zu $-\dfrac{ce^{i\psi}}{(z - z_*)^2}$ das Glied $-\dfrac{ce^{-i\psi}}{(z - \bar{z}_*)^2}$, und bei $\dfrac{1}{z - z_1} - \dfrac{1}{z - z_2}$ kommt das Glied $\dfrac{1}{z - \bar{z}_1} - \dfrac{1}{z - \bar{z}_2}$ hinzu. Demnach lautet der Ausdruck für $\dfrac{dS(z)}{dz}$ unter Berücksichtigung des früher Gesagten (Gleichung (12))

$$\frac{dS(z)}{dz} = \frac{-2\frac{a}{\pi}v_1}{z} + \frac{-2\frac{b}{\pi}v_2}{z - e_2} + \frac{-2\frac{a}{\pi}v_3}{z - e_3} + \cdots + \frac{-2\frac{\binom{a}{b}}{\pi}v_\nu}{z - e_\nu} + \cdots + \frac{-2\frac{a}{\pi}v_{2n-1}}{z + e_3} + \frac{-2\frac{b}{\pi}v_{2n}}{z + e_2}$$
$$+ i\left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_0}\right) - c\frac{e^{i\psi}}{(z - z_*)^2} - c\frac{e^{-i\psi}}{(z - \bar{z}_*)^2} + \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - \bar{z}_1} - \frac{1}{z - \bar{z}_2}.$$

Durch Multiplikation mit der Ableitung der Abbildungsfunktion $z(w)$ (vgl. (4)) und Übergang zur negativen konjugiert komplexen Größe erhalten wir das Geschwindigkeitsfeld der gesuchten Kanalsystemströmung:

$$\tilde{\mathfrak{V}}(w) = -\left(\overline{\frac{d\tilde{S}(w)}{dw}}\right) = -\left(\overline{\frac{dS(z)}{dz}\frac{dz}{dw}}\right).$$

Die verlangte Strömungsfunktion lautet:

$$\tilde{S}(w) = \tilde{S}(w(z)) = S(z) = U(x, y) + iV(x, y) =$$
$$-\frac{2a}{\pi}v_1 \log z - \frac{2b}{\pi}v_2 \log (z - e_2) - \frac{2a}{\pi}v_3 \log (z - e_3) - \cdots$$
$$-\frac{2\binom{a}{b}}{\pi}v_\nu \log (z - e_\nu) - \cdots - \frac{2a}{\pi}v_{2n-1} \log (z + e_3) - \frac{2b}{\pi}v_{2n} \log (z + e_2)$$
$$+ i \log \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + \frac{ce^{i\psi}}{z - z_*} + \frac{ce^{-i\psi}}{z - \bar{z}_*} + \log \frac{z - z_1}{z - z_2} + \log \frac{z - \bar{z}_1}{z - \bar{z}_2} + \text{Konst.}$$

Eingegangen 16. Juli 1938.

Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. Saale.

Einleitung.

M. Noether hat zuerst den Satz ausgesprochen, daß sich jede birationale Transformation der Ebene aus quadratischen zusammensetzen läßt. Der Satz ist seitdem mehrfach bewiesen worden. Wegen der Literatur[1]) verweise ich auf [1], S. 144—153.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich zwei Bemerkungen zu dem Buche von Frau Hudson machen:

1. Im Literaturverzeichnis sind unter Jung zwei Arbeiten (Nrn. 182, 183) angegeben, ohne kenntlich zu machen, daß es sich um zwei Verfasser handelt.

2. Zu meiner Arbeit (Nr. 183) bemerkt die Verfasserin: „Contains a criticism of Clebsch's theorem due to a misunderstanding". Es handelt sich darum, daß nach Clebsch die Zahl der ausgezeichneten Punkte in beiden Ebenen dieselbe ist. In dieser Fassung ist der Satz falsch. Die Verfasserin glaubt mich darauf aufmerksam machen zu müssen, daß der Satz richtig ist, wenn man jeden ausgezeichneten Punkt so oft rechnet, wie ausgezeichnete Kurven aus ihm hervorgehen. Genau dasselbe steht aber in meiner Arbeit[2]). Wenn Frau Hudson meine Arbeit so flüchtig gelesen hat, ist es weiter nicht verwunderlich, daß sie nicht bemerkt, daß die Arbeit eine neue Art zur Behandlung birationaler Transformationen enthält.

Im folgenden soll der Satz von Noether in etwas anderer Fassung bewiesen werden, insofern als gezeigt wird, daß man sich auf eine besondere Art von quadratischen Transformationen beschränken kann. Zunächst seien diese angegeben.

$K = (x, y)$ sei der rationale Körper der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, die als erste und zweite Veränderliche unterschieden seien. Ist ein Polynom von x, y in x vom Grade λ und in y vom Grade μ, so heiße λ seine erste, μ seine zweite Gradzahl und (λ, μ) sein Grad.

Von den birationalen Transformationen, die K in einen Körper $K' = (x', y')$ der beiden unabhängigen Veränderlichen x', y' überführen, seien hervorgehoben:

1. Die *Vertauschungstransformation* (V. Tr.)

$$x' = y, \quad y' = x,$$

die die erste mit der zweiten Veränderlichen vertauscht.

---

[1]) *Literatur*:

[1] Hilda P. Hudson, Cremona transformations, Cambridge 1927.

[2] H. W. E. Jung, Singuläre Punkte ebener algebraischer Kurven, Math. Ann. **84** (1921), S. 161—201.

[3] H. W. E. Jung, Stellentransformation in algebraischen Körpern zweier Veränderlicher, Acta math. **68** (1937), S. 7—69.

[2]) H. W. E. Jung, Über die Cremonasche Transformation der Ebene, Journ. f. r. u. a. Math. **138** (1910), S. 255—318, insbes. S. 304 unten.

2. Die *Fundamentaltransformation* (F. Tr.)

$$x' = x, \quad y' = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy}{b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy} = \frac{f_0}{f_x},$$

wo die a_i, b_i konstant sind. f_0 und f_x sollen teilerfremd sein, und $\frac{f_0}{f_x}$ darf nicht nur von x abhängen und nicht konstant sein. Bei einer F. Tr. bleibt also die erste Veränderliche bis auf die Bezeichnung ungeändert.

Der zu beweisende Satz läßt sich dann so aussprechen:

Jede birationale Transformation eines rationalen Körpers (x, y) in einen anderen (x', y') läßt sich aus endlich vielen Vertauschungs- und Fundamentaltransformationen zusammensetzen.

§ 1. Die Fundamentaltransformation.

Zunächst einige besondere Fälle der F. Tr.:

1. Die identische Transformation

$$x' = x, \quad y' = y.$$

2. Eine spezielle lineare Transformation

$$x' = x, \quad y' = \frac{a_0 + a_2 y}{b_0 + b_2 y}.$$

Die allgemeine lineare Transformation, bei der auch die erste Veränderliche linear transformiert wird, kann aus speziellen und V. Trn. zusammengesetzt werden.

Die linearen und die V. Trn. und die aus ihnen zusammengesetzten sind die einzigen ohne ausgezeichnete Stellen, bei denen also kein Primteiler seine Art ändert.

Im allgemeinen Fall hat die Funktion $\frac{f_0}{f_\infty}$ zwei Unbestimmtheitsstellen, die zusammenfallen können. Hier genügt es, anzunehmen, daß sie verschieden sind. Es seien die Stellen $A_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $A_2 = (\alpha_2, \beta_2)$, wobei die Zahlen α_i, β_i endlich seien. Die F. Tr. hat dann die Form

$$(1) \quad x' = x, \quad y' = \frac{a\beta_2'(x - \alpha_1)(y - \beta_2) + b\beta_1'(x - \alpha_2)(y - \beta_1)}{a(x - \alpha_1)(y - \beta_2) + b(x - \alpha_2)(y - \beta_1)} = \frac{f_0}{f_x}.$$

Sie ist also durch Angabe der beiden Unbestimmtheitsstellen nicht eindeutig gegeben. Eine solche F. Tr. sei mit (A_1, A_2) bezeichnet. Aus (1) folgt umgekehrt

$$(2) \quad x = x', \quad y = \frac{a\beta_2(x' - \alpha_1)(y' - \beta_2') + b\beta_1(x' - \alpha_2)(y' - \beta_1')}{a(x' - \alpha_1)(y' - \beta_2') + b(x' - \alpha_2)(y' - \beta_1')} = \frac{f_0'}{f_x'},$$

so daß die zu einer F. Tr. entgegengesetzte wieder eine F. Tr. ist. Ihre Unbestimmtheitsstellen sind $A_1' = (\alpha_1, \beta_1')$, $A_2' = (\alpha_2, \beta_2')$.

Aus (1) und (2) ist zu erkennen, daß weder $\alpha_1 = \alpha_2$ noch $\beta_1 = \beta_2$ noch $\beta_1' = \beta_2'$ sein darf. Von zwei Stellen, wo die erste oder die zweite Veränderliche, nicht aber beide denselben Wert haben, soll gesagt werden, sie befinden sich in *besonderer Lage*. Damit also eine F. Tr. (A_1, A_2) vorhanden ist, ist notwendig und hinreichend, daß A_1 und A_2 keine besondere Lage haben. Für jede dieser Transformationen sind dann von selbst A_1' und A_2' auch nicht in besonderer Lage. Wohl aber können A_1 und A_2 zusammenfallen. Dasselbe gilt dann von A_1' und A_2'. Wie schon gesagt, werden derartige Transformationen hier nicht benutzt.

Von den Zahlen $\alpha_i, \beta_i, \beta_i'$ können auch einige unendlich sein. Es sei dem Leser überlassen, für diese Fälle die Gestalt der Transformationsformeln zu bestimmen.

Wegen der im folgenden benutzten Methode und der Bezeichnungen sei auf die Arbeiten [2] und [3] verwiesen.

Die Stellendefinitionen in K und K' seien die einfachen ([3], S. 66). Die Zähler von x, y, x', y' seien $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{L}_0', \mathfrak{M}_0'$, die Nenner $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$, wo $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ ganze Divisoren erster Art von K und $\mathfrak{L}_0', \mathfrak{M}_0', \mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ solche von K' sind. Es gilt für die Schnittpunktzahlen

$$(3)\quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{L}', \mathfrak{L}') = (\mathfrak{M}', \mathfrak{M}') = 0, \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{L}', \mathfrak{M}') = 1.$$

Bei der F. Tr. gehen zwei Primteiler zweiter Art $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ von K, die zu den Stellen A_1, A_2 gehören, in Primteiler erster Art $\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2'$ von K' über; ebenso gehen zwei Primteiler zweiter Art $\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2'$ von K', die zu den Stellen A_1', A_2' gehören, in solche erster Art $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ von K über. Die Eichfunktionen von $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_i'$ sind

$$(4)\qquad \mathsf{B}_i = y - \beta_i - \tau_i(x' - \alpha_i), \qquad \mathsf{B}_i' = y' - \beta_i' - \tau_i'(x' - \alpha_i).$$

Ferner ist $\mathfrak{B}_i$ der Zähler von $x - \alpha_i$ und $\mathfrak{B}_i'$ der von $x' - \alpha_i$, so daß

$$(5)\qquad \mathfrak{B}_i \sim \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{B}_i' \sim \mathfrak{L}'.$$

Der Zähler von $\frac{f_0}{f_\infty}$ in K sei $\mathfrak{F}_0$ und der von $\frac{f_0'}{f_\infty'}$ in K' sei $\mathfrak{F}_0'$, so daß

$$(6)\qquad \mathfrak{F}_0 \sim \mathfrak{L}\mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{F}_0' \sim \mathfrak{L}'\mathfrak{M}'.$$

Es bestehen die Transformationsformeln ([3], S. 15)

$$(7)\qquad \mathfrak{b}_i = \frac{\mathfrak{B}_i'}{\mathfrak{b}_i'}, \qquad \mathfrak{b}_i' = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{b}_i}, \qquad \mathfrak{M}_0 = \frac{\mathfrak{F}_0'}{\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}_2'}, \qquad \mathfrak{M}_0' = \frac{\mathfrak{F}_0}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2},$$

aus denen $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_i'$ folgt. In Verbindung mit (5), (6) ergeben sich die Äquivalenzen

$$(8)\qquad \mathfrak{L} \sim \mathfrak{L}', \qquad \mathfrak{M} \sim \frac{\mathfrak{L}'\mathfrak{M}'}{\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}_2'}, \qquad \mathfrak{M}' \sim \frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}.$$

Ferner ist noch

$$(9)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_2) &= -1, \qquad (\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2) = 0; \\ (\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_1') = (\mathfrak{b}_2', \mathfrak{b}_2') &= -1, \qquad (\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2') = 0 \end{aligned}$$

und

$$(10)\qquad (\mathfrak{Q}, \mathfrak{b}_i) = 0, \qquad (\mathfrak{Q}', \mathfrak{b}_i') = 0,$$

wenn $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art von K und $\mathfrak{Q}'$ ein solcher von K' ist.

§ 2. Die festen Stellen eines Büschels.

H_0 und H_∞ seien zwei Polynome in x, y und es werde

$$(11)\qquad H = H_0 - \eta H_\infty$$

gesetzt, wo η ein Parameter ist. H sei vom Grade (λ, μ), so daß für den Zähler $\mathfrak{H}$ von H gilt

$$(12)\qquad \mathfrak{H} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu.$$

Das hierdurch definierte Büschel von ganzen Divisoren $\mathfrak{H}$ sei mit $\langle \mathfrak{H} \rangle$ bezeichnet. Vorausgesetzt wird, daß die ganzen Divisoren $\mathfrak{H}$ bei nicht besonderen Werten von η Primteiler sind.

Die voneinander verschiedenen Stellen von K, wo feste Stellen von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ liegen, seien $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Um die festen Stellen von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ zu charakterisieren, lösen wir sie durch eine einseitige Stellentransformation soweit auf, daß keine festen Stellen mehr vorhanden sind. Dadurch mögen die Primteiler zweiter Art von K

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$$

in Primteiler erster Art übergehen, die gleich bezeichnet seien. Der Körper K gehe in K^* über. In $\mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{a}_i$ in der Potenz δ_i enthalten, so daß

$$s(\mathfrak{H}) = \mathfrak{a}_1^{\delta_1}\mathfrak{a}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\delta_\varrho}, \qquad \mathfrak{H} = s(\mathfrak{H})\,\mathfrak{H}^*. \tag{13}$$

Das Büschel $\langle\mathfrak{H}\rangle$ geht in das Büschel $\langle\mathfrak{H}^*\rangle$ über, das keine festen Stellen hat. Ist

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\alpha_\varrho} \tag{14}$$

der zu den $\mathfrak{a}_i$ gehörende kanonische Divisor, so ist die kanonische Klasse von K ([3], S. 30)

$$(\mathfrak{K}^*) = \left(\frac{\mathfrak{a}_0}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}\right). \tag{15}$$

Die Zeile der α_i sei mit α und die der δ_i mit δ bezeichnet. Die Matrix der Schnittzahlen $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ sei $-\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^{-1} = a$. Die Matrizen $\mathfrak{a}$ und a sind ganzzahlig, und es ist $|\mathfrak{a}| = |a| = 1$. Bezeichnet man die gestürzte Matrix durch Überstreichen, so lassen sich $\mathfrak{a}$ und a in der Form schreiben ([2], S. 189)

$$\mathfrak{a} = h\bar{h}, \qquad a = \bar{g}g, \quad \text{wo} \quad gh = 1. \tag{16}$$

Dabei sind g und h Matrizen, in deren Diagonale Einsen stehen, während die Elemente unterhalb der Diagonale Nullen sind. Die Elemente oberhalb der Diagonale sind 0 oder -1 in h und nicht negative ganze Zahlen in g.

Bemerkt sei noch, daß

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{a}_i) = 0, \tag{17}$$

wenn $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Art von K ist, und daß

$$\alpha h = (1, 1, \ldots, 1). \tag{18}$$

Da zwei Primteiler aus $\langle\mathfrak{H}^*\rangle$ einander nicht schneiden, so ist unter Beachtung von (17)

$$0 = (\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*) = \left(\frac{\mathfrak{H}}{s(\mathfrak{H})}, \frac{\mathfrak{H}}{s(\mathfrak{H})}\right) = (\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) + (s\mathfrak{H}, s\mathfrak{H}). \tag{19}$$

Wegen (3) folgt aus (12)

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu, \mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu) = 2\lambda\mu.$$

Setzt man

$$\delta h = q, \tag{20}$$

so wird nach (13) und (16)

$$(s\mathfrak{H}, s\mathfrak{H}) = -\delta\mathfrak{a}\bar{\delta} = -\delta h(\bar{\delta h}) = -q\bar{q} = -\Sigma q_i^2.$$

Aus (18) ergibt sich daher

$$2\lambda\mu = \Sigma q_i^2. \tag{21}$$

Da die Primteiler eines Büschels keine beweglichen mehrfachen Stellen haben, so hat ein allgemeiner Primteiler $\mathfrak{H}^*$ von $\langle\mathfrak{H}^*\rangle$ keine mehrfachen Stellen. Die kanonische Klasse $(\mathfrak{k})$ des Primteilers $\mathfrak{H}^*$ entsteht daher für $\mathfrak{H}^* = 0$ aus der Klasse $(\mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*)$, so daß

$$(\mathfrak{k}) = (\mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*) \quad \text{für} \quad \mathfrak{H}^* = 0. \tag{22}$$

Da der Grad von $(\mathfrak{k})$ gleich $2p-2$ ist, wenn p das Geschlecht von $\mathfrak{H}^*$, also auch das von $\mathfrak{H}$ ist, so ist nach (22) wegen (12), (13), (15)

$$2p-2 = (\mathfrak{H}^*, \mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*) = \left(\frac{\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu}{s(\mathfrak{H})}, \frac{\mathfrak{L}^{\lambda-2}\mathfrak{M}^{\mu-2}}{s(\mathfrak{H})\,\mathfrak{a}_0^{-1}}\right)$$

oder wegen (16), (18), (20)

$$2(\lambda-1)(\mu-1) = \Sigma q_i(q_i-1) + 2p. \tag{23}$$

Im besonderen gilt für $p = 0$

$$2(\lambda - 1)(\mu - 1) = \Sigma q_i(q_i - 1). \tag{24}$$

Durch Subtraktion folgt noch aus (21) und (24)

$$2\lambda + 2\mu - 2 = \Sigma q_i. \tag{25}$$

Für einen ganzen Divisor $\mathfrak{T}$ aus $(\mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^*)$ gilt

$$\mathfrak{T} \sim \mathfrak{H}^*\mathfrak{K}^* \sim \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{a}_0}{s(\mathfrak{H})\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2} \sim \frac{\mathfrak{L}^{\lambda-2}\mathfrak{M}^{\mu-2}}{\mathfrak{a}_1^{\delta_1-\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\delta_2-\alpha_2}\dots\mathfrak{a}_\varrho^{\delta_\varrho-\alpha_\varrho}}.$$

Bedenkt man, daß die *Körper* $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ identisch sind, so folgt: Ist $\mathfrak{H}$ ein allgemeiner Primteiler aus $\langle\mathfrak{H}\rangle$, dessen Geschlecht also p ist, so besteht die Schar der adjungierten ganzen Divisoren von $\mathfrak{H}$ aus den Zählern derjenigen Polynome von x, y des Grades $(\lambda - 2, \mu - 2)$, die durch den Divisor

$$\mathfrak{a}_1^{\delta_1-\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\delta_2-\alpha_2}\dots\mathfrak{a}_\varrho^{\delta_\varrho-\alpha_\varrho} \tag{26}$$

teilbar sind.

Aus (21) und (23) ergibt sich, daß man für die Berechnung der Zahl der Schnittpunkte zweier Divisoren aus $\langle\mathfrak{H}\rangle$ und für die Berechnung des Geschlechtes p eines nicht speziellen Primteilers $\mathfrak{H}$ so verfahren kann, als ob das Büschel $\langle\mathfrak{H}\rangle$ ϱ voneinander verschiedene feste Stellen $Q_1, Q_2, \dots, Q_\varrho$ hätte, wobei Q_i eine q_i-fache Stelle mit getrennten Tangenten ist. Diese Stellen Q_i haben nach M. Noether nicht nur eine symbolische Bedeutung ([2], S. 195). Es mögen etwa die r Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_r$ zur Stelle S_1 gehören. Sie mögen so geordnet sein, wie sie beim Auflösen der Stelle S_1 der Reihe nach durch je eine Elementartransformation (E.Tr.) entstehen. Dann ist zunächst S_1 eine q_1-fache Stelle von $\langle\mathfrak{H}\rangle$, also mit Q_1 zu identifizieren. Durch die erste E.Tr. wird S_1, das selbst Stelle nullter Ordnung genannt wird, in unendlichviele Stellen erster Ordnung aufgelöst, wobei $\mathfrak{a}_1$ zu einem Primteiler erster Art wird. Von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ spaltet sich der Faktor $\mathfrak{a}_1^{q_1}$ ab. Das dadurch aus $\langle\mathfrak{H}\rangle$ entstehende Büschel $\langle\mathfrak{H}^{(1)}\rangle$ hat dann an einer oder an mehreren Stellen erster Ordnung, etwa an zwei Stellen, feste Stellen der Vielfachheit q_2 und q_3. Diese Stellen sind dann Q_2 und Q_3. Sie müssen weiter durch je eine E.Tr. in Stellen zweiter Ordnung aufgelöst werden, wobei die Primteiler $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ ihre Art ändern. Dadurch spaltet sich von $\langle\mathfrak{H}^{(1)}\rangle$ der Faktor $\mathfrak{a}_2^{q_2}\mathfrak{a}_3^{q_3}$ ab, und es entsteht ein Büschel $\langle\mathfrak{H}^{(2)}\rangle$. Da sich auch von $\mathfrak{a}_1$ positive Potenzen von $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ absondern, so enthält $\langle\mathfrak{H}\rangle$ die Primteiler $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ in einer Potenz, die höher ist als q_2 und q_3. Ist $r > 3$, so hat $\langle\mathfrak{H}^{(2)}\rangle$ an einer oder an mehreren Stellen zweiter Ordnung feste Stellen, die wieder durch je eine E. Tr. aufzulösen sind. In dieser Weise ist fortzufahren, bis S_1 vollständig aufgelöst ist. Die Stellen $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ fallen also alle mit S_1 zusammen. Nach M. Noether kann man die feste Stelle S_1 sich aus den zunächst getrennt liegenden Stellen $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ dadurch entstanden denken, daß diese Stellen in bestimmter Weise nach S_1 zusammenrücken. Ein Beweis dafür ist mir nicht bekannt. Die Art, wie die Q_i nach S_1 wandern müssen, ist wahrscheinlich durch die Eichfunktionen der $\mathfrak{a}_i$ gegeben. Es sei noch bemerkt, daß die Stellen Q_i zwar die Vielfachheiten q_i haben, aber keineswegs getrennte Tangenten.

Da durch das Auflösen durch eine E.Tr. keine Stelle höherer Vielfachheit entstehen kann, so ist *die Vielfachheit q_1 der Stelle nullter Ordnung Q_1 nicht kleiner als die Vielfachheiten $q_2, q_3, \dots, q_r$ der Stellen höherer Ordnung, die mit Q_1 zusammenfallen.*

Entsprechendes gilt für die anderen festen Stellen S_k.

Die Art der festen Stellen ist durch die Angabe der Primteiler $\mathfrak{a}_i$ und der Exponenten δ_i vollkommen gegeben.

Wie wir gesehen haben, ist das Verhalten der zu einem allgemeinen Primteiler $\mathfrak{H}$ gehörenden adjungierten ganzen Divisoren in den Stellen S_i dadurch bestimmt, daß sie durch den Divisor (26) teilbar sein müssen. Bezeichnet man die Vielfachheit von $\mathfrak{T}$ in Q_i mit t_i, so ergibt sich, entsprechend (20) und wegen (18)

$$t = (\delta - \alpha)h = (q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_\varrho - 1).$$

Da umgekehrt

$$\delta - \alpha = (q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_\varrho - 1)g,$$

und da die Elemente der Matrix g nicht negativ sind, so folgt, daß ein ganzer Divisor $\mathfrak{T}$ durch den Divisor (26) dann und nur dann teilbar ist, wenn er in Q_i mindestens einen $(q_i - 1)$-fachen Punkt hat. Die allgemeinen Primteiler $\mathfrak{H}$ verhalten sich also auch in bezug auf ihre adjungierten Divisoren so, als ob sie verschiedene mehrfache Stellen Q_i mit getrennten Tangenten hätten.

Die Zahlen q_i sind ihrer Bedeutung nach positiv. Es erweist sich aber als vorteilhaft, auch den Fall zuzulassen, wo eine oder zwei der Stellen Q_i die Vielfachheit 0 haben. Diese Stellen sollen von der nullten Ordnung sein, also mit den entsprechenden Stellen S_i übereinstimmen. Daß ihre Vielfachheit 0 ist, bedeutet, daß sie nicht zu den festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ gehören. Eine solche Stelle S_i sei durch eine E. Tr. aufgelöst, so daß zu ihr ein Primteiler $\mathfrak{a}_i$ gehört. Die zugehörigen Zahlen δ_i, q_i sind 0, da ein allgemeiner Primteiler $\mathfrak{H}$ nicht durch eine solche Stelle geht. Ferner ist in diesem Fall

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i) = -\mathfrak{a}_{ii} = -1, \quad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) = 0 \text{ für } i \neq k.$$

Die Betrachtungen dieses Paragraphen gelten auch, wenn $\langle\mathfrak{H}\rangle$ statt eines Büschels eine lineare Schar von Primteilern ist. Nur sind dann auch bewegliche Schnittpunkte vorhanden. Ist deren Zahl D, so ist in den Gleichungen (21) und (25) auf der rechten Seite der Summand D hinzuzufügen.

§ 3. Wirkung einer Fundamentaltransformation auf die festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$.

1. Auf $\langle\mathfrak{H}\rangle$ soll eine F. Tr. angewandt werden, deren ausgezeichnete Stellen mit zwei der festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ zusammenfallen, etwa mit den Stellen S_1 und S_2, zu denen die Stellen nullter Ordnung Q_1 und Q_2 gehören mögen. Der Fall, daß die Vielfachheiten q_1, q_2 von Q_1, Q_2 null sind, daß also S_1 und S_2 in Wirklichkeit keine festen Stellen von $\langle\mathfrak{H}\rangle$ sind, sei nicht ausgeschlossen. Bei der F. Tr. (S_1, S_2) gehe $\langle\mathfrak{H}\rangle$ in $\langle\mathfrak{H}'\rangle$ über, und es sei

$$\mathfrak{H}' \sim \mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}. \tag{27}$$

Die ausgezeichneten Stellen der F. Tr. in K' seien S_1', S_2', und die zugehörigen Stellen nullter Ordnung von $\langle\mathfrak{H}'\rangle$ seien Q_1', Q_2' mit den Vielfachheiten q_1', q_2'. Dann besteht die Transformationsformel

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{b}_1^{q_1}\mathfrak{b}_2^{q_2}} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{b}'^{q_1'}_1\mathfrak{b}'^{q_2'}_2}, \tag{28}$$

woraus nach (12) und (27) folgt

$$\frac{\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu}{\mathfrak{b}_1^{q_1}\mathfrak{b}_2^{q_2}} \sim \frac{\mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}}{\mathfrak{b}'^{q_1'}_1\mathfrak{b}'^{q_2'}_2}. \tag{29}$$

In Verbindung mit den Formeln des § 1 erhält man hieraus

$$\mu' = \left(\mathfrak{L}', \frac{\mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}}{\mathfrak{b}'^{q_1'}_1\mathfrak{b}'^{q_2'}_2}\right) = \left(\mathfrak{L}, \frac{\mathfrak{L}^\lambda\mathfrak{M}^\mu}{\mathfrak{b}_1^{q_1}\mathfrak{b}_2^{q_2}}\right) = \mu,$$

$$\lambda = \left(\mathfrak{M}', \frac{\mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}}{\mathfrak{b}_1'^{q_1'}\mathfrak{b}_2'^{q_2'}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}, \frac{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}}{\mathfrak{b}_1^{q_1}\mathfrak{b}_2^{q_1}}\right) = \lambda + \mu - (q_1 + q_2),$$

$$q_i' = \left(\mathfrak{b}_i', \frac{\mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}}{\mathfrak{b}_1'^{q_1'}\mathfrak{b}_2'^{q_2'}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{b}_i}, \frac{\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}}{\mathfrak{b}_1^{q_1}\mathfrak{b}_2^{q_2}}\right) = \mu - q_i,$$

so daß

(30) $\lambda' = \lambda + \mu - (q_1 + q_2), \quad \mu' = \mu, \quad q_i' = \mu - q_i$ für $i = 1, 2.$

2. Die festen Stellen von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ haben wir aufgelöst und kamen so zu dem Büschel $\langle \mathfrak{H}^* \rangle$ im Körper K^*, das keine festen Stellen hat. Die Primteiler $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ sind identisch mit den zu Q_1 und Q_2 gehörenden Primteilern $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, da sie zu denselben Stellen gehören und dieselben Eichfunktionen haben, nämlich

$$y - \beta_i - \tau_i(x - \alpha_i).$$

Von jetzt an sei $\mathfrak{b}_i$ mit $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i'$ mit $\mathfrak{a}_i'$ bezeichnet ($i = 1, 2$). Der Körper K^* unterscheidet sich dadurch von K, daß in K^* die Primteiler $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ von der ersten Art sind. Aus K' entsteht daher K^*, wenn die Primteiler $\mathfrak{b}_1' = \mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_2' = \mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_\varrho$ in solche erster Art übergehen, so daß K^* auch aus K' durch eine einseitige Stellentransformation hervorgeht. Dabei geht das Büschel $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ auch in $\langle \mathfrak{H}^* \rangle$ über.

Entsprechend zu (13) gilt, wenn der Gleichmäßigkeit halber $\mathfrak{a}_i$ für $i \geqq 3$ auch mit $\mathfrak{a}_i'$ bezeichnet wird,

(31) $$s(\mathfrak{H}') = \mathfrak{a}_1'^{\delta_1'}\mathfrak{a}_2'^{\delta_2'}\cdots\mathfrak{a}_\varrho'^{\delta_\varrho'}, \qquad \mathfrak{H}' = s(\mathfrak{H}')\mathfrak{H}^*,$$

woraus in Verbindung mit (13) folgt

(32) $$\mathfrak{H}^* = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{a}_1^{\delta_1}\mathfrak{a}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{a}_\varrho^{\delta_\varrho}} = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{a}_1'^{\delta_1'}\mathfrak{a}_2'^{\delta_2'}\cdots\mathfrak{a}_\varrho'^{\delta_\varrho'}}.$$

Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zu Punkten nullter Ordnung gehören, so ist

(33) $$\delta_1 = q_1, \qquad \delta_2 = q_2;$$

ebenso ist

(34) $$\delta_1' = q_1', \qquad \delta_2' = q_2'.$$

Durch Vergleich von (34) mit (28) könnte man wegen $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a}_i$ für $i \geqq 3$ schließen, daß $\delta_i' = \delta_i$ für $i \geqq 3$. Das ist aber nicht richtig. Die Gleichung (28) gilt nur für den Übergang von K zu K' und berücksichtigt von Primteilern zweiter Art nur die Primteiler $\mathfrak{b}_i'$, $\mathfrak{b}_i$. Die in (28) rechts und links stehenden Divisoren enthalten alle Primteiler erster Art und die Primteiler, die beim Übergang $K \longleftrightarrow K'$ ihre Art ändern, in derselben Potenz, aber nicht die anderen Primteiler zweiter Art, wenigstens nicht die zu den Stellen S_i und S_i' gehörenden. Das zeigen schon ganz einfache Beispiele.

Die ϱ Primteiler $\mathfrak{a}_i'$ bilden wie die $\mathfrak{a}_i$ ein vollkommenes System, da sie zu einer einseitigen Stellentransformation gehören. Die Matrix der Schnittzahlen $(\mathfrak{a}_i', \mathfrak{a}_k')$ sei $= \alpha'$. Entsprechend (19) sei

(35) $$\alpha' = h'\bar{h}', \quad a' = \bar{g}'g', \quad \text{wo} \quad g'h' = 1.$$

Analog zu (17) ist

(36) $$(\mathfrak{Q}', \mathfrak{a}_i') = 0,$$

wenn $\mathfrak{Q}'$ ein Divisor erster Art von K' ist.

Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zu verschiedenen Stellen von K gehören, so ist $\mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{a}_{21} = 0$ und $h_{21} = 0$; ebenso ist $\mathfrak{a}_{12}' = \mathfrak{a}_{21}' = 0$, $h_{21}' = 0$. Unter Hervorhebung der ersten beiden

Spalten und Zeilen sei

$$(37) \qquad \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{a}' = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1' & \mathfrak{c}_2' \\ \mathfrak{c}_2' & \mathfrak{c}_0' \end{bmatrix},$$

$$(38) \qquad h = \begin{bmatrix} e & \chi \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}, \quad h' = \begin{bmatrix} e & \chi' \\ 0 & h_0' \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e_1 & \gamma \\ 0 & g_0 \end{bmatrix}, \quad g' = \begin{bmatrix} e_1' & \gamma' \\ 0 & g_0' \end{bmatrix},$$

wo e die Einheitsmatrix der Ordnung 2 ist. Da $\mathfrak{a}_i' = \mathfrak{a}_i$ für $i \geqq 3$, so ist $\mathfrak{c}_0' = \mathfrak{c}_0$. Daraus ergibt sich wegen der Art, wie h und h' aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gewonnen werden ([2], S. 192), daß auch $h_0' = h_0$. Aus $gh = 1$, $g'h' = 1$ folgt, daß

$$e_1 = e_1' = e, \qquad g_0 = g_0' = h_0^{-1},$$

und wegen $\mathfrak{a}\bar{g} = h\bar{h}\bar{g} = h$, $\mathfrak{a}'\bar{g}' = h'$ ist

$$(39) \qquad \mathfrak{c}_0\bar{g}_0 = h_0, \qquad \mathfrak{c}_2\bar{g}_0 = \chi, \qquad \mathfrak{c}_2'\bar{g}_0 = \chi';$$

schließlich ist noch

$$a = \bar{g}g = \begin{bmatrix} e & \gamma \\ \bar{\gamma} & \bar{\gamma}\gamma + \bar{g}_0 g_0 \end{bmatrix}, \qquad a' = \begin{bmatrix} e & \gamma' \\ \bar{\gamma}' & \bar{\gamma}'\gamma' + \bar{g}_0 g_0 \end{bmatrix}.$$

Da $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i'$ für $i \geqq 3$, so ist nach (17) und (36)

$$(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{a}_i', \mathfrak{H}') = 0 \quad \text{für} \quad i \geqq 3$$

und aus (34) folgt durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i'$

$$\delta_1 \mathfrak{a}_{1i} + \delta_2 \mathfrak{a}_{2i} + \cdots + \delta_\varrho \mathfrak{a}_{\varrho i} = \delta_1' \mathfrak{a}_{1i}' + \delta_2' \mathfrak{a}_{2i}' + \cdots + \delta_\varrho' \mathfrak{a}_{\varrho i}' \quad (i \geqq 3).$$

Setzt man

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_0), \qquad \delta' = (\delta_1', \delta_2', \delta_0'),$$

so können diese Gleichungen wegen (37) in der Form geschrieben werden

$$(\delta_1, \delta_2)\mathfrak{c}_2 + \delta_0 \mathfrak{c}_0 = (\delta_1', \delta_2')\mathfrak{c}_2' + \delta_0' \mathfrak{c}_0.$$

Durch hintere Multiplikation mit $\bar{g}_0$ folgt wegen (39)

$$(40) \qquad (\delta_1, \delta_2)\chi + \delta_0 h_0 = (\delta_1', \delta_2')\chi' + \delta_0' h_0.$$

Andrerseits ist wegen $q = \delta h$, $q' = \delta' h'$, wenn

$$q = (q_1, q_2, q_0), \qquad q' = (q_1', q_2', q_0')$$

gesetzt wird, nach (38)

$$q_0 = (\delta_1, \delta_2)\chi + \delta_0 h_0, \qquad q_0' = (\delta_1', \delta_2')\chi' + \delta_0' h_0.$$

Durch Vergleich mit (40) folgt

$$q_0' = q_0.$$

Das Ergebnis dieses Paragraphen ist:

Das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ habe ϱ feste Stellen Q_i der Vielfachheit q_i, die nicht getrennt zu liegen brauchen. Sind Q_1 und Q_2 zwei Stellen nullter Ordnung, so geht $\langle \mathfrak{H} \rangle$ durch eine F. Tr. (Q_1, Q_2) in ein Büschel $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ über, das statt der festen Stellen Q_1, Q_2 die festen Stellen Q_1', Q_2' hat mit den Vielfachheiten $q_1' = \mu - q_1$, $q_2' = \mu - q_2$, während die anderen festen Stellen mit ihren Vielfachheiten erhalten bleiben. Die Fälle $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ sind nicht ausgeschlossen. Für $q_i = 0$ hat $\langle \mathfrak{H} \rangle$ in Q_i keinen festen Punkt.

Zwei Fälle heben wir hervor:

1. Ist $q_1 = 0$, ist also Q_1 keine feste Stelle von $\langle \mathfrak{H} \rangle$, so wird $q_1' = \mu$. Das Büschel $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ hat daher eine feste Stelle mehr als $\langle \mathfrak{H} \rangle$, und zwar eine mit der Vielfachheit μ. Hat

x in Q_1 den Wert α_1, und liegt im besonderen Q_1 so, daß an keiner festen Stelle von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ $x = \alpha_1$ ist, so fällt Q_1' mit keiner anderen festen Stelle von $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ zusammen, da bei einer F.Tr. x ungeändert bleibt. Dann ist also Q_1' ein μ-facher Punkt mit beweglichen getrennten Tangenten, was geometrisch klar ist.

2. Ist $q_1 = \mu$, so hat Q_1' die Vielfachheit 0, ist also keine feste Stelle von $\langle \mathfrak{H}' \rangle$, so daß $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ eine feste Stelle weniger hat als $\langle \mathfrak{H} \rangle$. Ist auch $q_2 = \mu$, so verliert $\langle \mathfrak{H} \rangle$ durch eine F.Tr. (Q_1, Q_2) zwei feste Stellen, während die andern ihre Vielfachheit behalten.

§ 4. Transformation eines Büschels $\langle \mathfrak{H} \rangle$ von Primteilern des Geschlechtes 0 durch Vertauschungs- und Fundamentaltransformationen in ein Büschel, dessen Gradzahlen 0 und 1 sind.

Von jetzt an setzen wir voraus, daß die Primteiler $\mathfrak{H}$ das Geschlecht 0 haben. Zunächst kann, wenn nötig, durch eine V.Tr. erreicht werden, daß die erste Gradzahl λ von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ nicht kleiner ist als die zweite, so daß

$$\lambda \geqq \mu. \tag{41}$$

Die Vielfacheiten q_i sollen von jetzt an mindestens gleich 1 sein. Andrerseits kann kein q_i größer als μ sein, da die Divisoren $\mathfrak{H}$ im allgemeinen nicht zerfallen sollen. Daher ist

$$1 \leqq q_i \leqq \mu. \tag{42}$$

Es sei $q_1 \geqq q_i$, was durch passende Wahl der Bezeichnung erreicht werden kann. Man kann dann annehmen, daß Q_1 eine Stelle nullter Ordnung ist, da eine Stelle nie eine größere Vielfachheit haben kann als die mit ihr zusammenfallende Stelle nullter Ordnung.

Ist $q_1 > \frac{\mu}{2}$, so wählen wir eine Stelle A, die keine feste Stelle von $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ist, und auch mit keiner dieser Stellen auf derselben Parallelen zur y-Achse liegt, und führen eine F.Tr. (Q_1, A) aus. Dadurch geht die feste Stelle Q_1 verloren. Statt dessen erhält man eine feste Stelle Q_1' mit der Vielfachheit q_1', wo

$$0 \leqq q_1' < \frac{\mu}{2}.$$

Außerdem ergibt sich eine feste Stelle P_1 der Vielfachheit μ mit beweglichen getrennten Tangenten. Die neue erste Ordnungszahl ist $\lambda' = \lambda + \mu - q_1$, so daß wegen (42)

$$\lambda' \geqq \lambda \geqq \mu.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens erhalten wir aus $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ein Büschel $\langle \mathfrak{H}' \rangle$ mit den Gradzahlen (λ', μ), wo $\lambda' \geqq \mu$, das ϱ' feste Stellen Q_i' mit den Ordnungszahlen q_i' hat, für die

$$1 \leqq q_i' \leqq \frac{\mu}{2};$$

außerdem sind noch etwa l feste Stellen P_i der Vielfachheit μ vorhanden, die getrennt liegen und bewegliche getrennte Tangenten haben. Sollte von vornherein $q_i \leqq \frac{\mu}{2}$ gelten, so haben wir ohne Transformation denselben Fall, nur daß dann $l = 0$ ist.

Sind unter den Stellen P_i zwei, etwa P_l, P_{l-1} vorhanden, die nicht in besonderer Lage sind, so verschwinden sie durch eine F. Tr. (P_l, P_{l-1}), während im übrigen an den festen Stellen nichts geändert wird. Die neue erste Gradzahl ist $\lambda' + \mu - 2\mu = \lambda' - \mu$, also um μ kleiner als λ'. In dieser Weise können wir fortfahren, bis unter den P_i keine zwei mehr vorkommen, die nicht in besonderer Lage sind. Wird dabei die erste Gradzahl kleiner als die zweite, so wenden wir eine V.Tr. an. Es ist dann eine Vereinfachung

eingetreten, da die zweite Gradzahl des neuen Büschels kleiner ist als die des ursprünglichen. Mit dem neuen Büschel verfahren wir dann so wie mit dem gegebenen.

Auf diese Weise erhält man aus $\langle \mathfrak{H} \rangle$ ein Büschel, das wieder mit $\langle \mathfrak{H} \rangle$ bezeichnet sei, für das entweder die zweite Gradzahl 0 oder 1 ist (Fall II) oder das folgende Eigenschaften hat (Fall I):

1. $\lambda \geqq \mu \geqq 2$.

2. $\langle \mathfrak{H} \rangle$ hat ϱ feste Stellen Q_i der Vielfachheit q_i, die nicht getrennt zu liegen brauchen, wo

$$0 < q_i \leqq \frac{\mu}{2}. \tag{43}$$

3. $\langle \mathfrak{H} \rangle$ hat außerdem l getrennt liegende feste Punkte P_i der Vielfachheit μ, die also bewegliche getrennte Tangenten haben.

4. Je zwei der Stellen P_i befinden sich in besonderer Lage. Hätte x in zwei Stellen P_i denselben Wert α, so hätte der Zähler $\mathfrak{L}_\alpha$ von $x - \alpha$ mit jedem Divisor $\mathfrak{H}$ mindestens 2μ Schnittpunkte, während $(\mathfrak{L}, \mathfrak{H}) = \mu$ ist. Das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ müßte daher den Faktor $\mathfrak{L}_\alpha$ haben, was nicht möglich ist, da die Divisoren $\mathfrak{H}$ im allgemeinen Primteiler sein sollen. Die l Stellen P_i liegen also alle auf einer Parallelen zur x-Achse, und man kann durch eine lineare Transformation erreichen, daß sie auf $y = 0$ liegen.

5. Schließlich kann man noch annehmen, daß es nicht möglich ist, durch eine F. Tr. zu erreichen, daß die erste Gradzahl kleiner wird als die zweite. Fügt man nämlich zu einer solchen Transformation noch eine V. Tr., so erhält man ein Büschel, dessen zweite Gradzahl kleiner ist als die des ursprünglichen. Dies würde dann in derselben Weise zu behandeln sein wie das gegebene Büschel.

§ 5. Fall I.

Die Gleichungen (21), (24), (25) lauten jetzt sinngemäß unter Berücksichtigung der Stellen P_i

$$2\lambda\mu = l\mu^2 + \Sigma q_i^2, \tag{44}$$

$$2(\lambda - 1)(\mu - 1) = l\mu(\mu - 1) + \Sigma q_i(q_i - 1), \tag{45}$$

$$2\lambda + 2\mu - 2 = l\mu + \Sigma q_i. \tag{46}$$

Wegen $\mu - 2 \geqq 0$ und nach (43) folgt aus (45)

$$4(\lambda - 1)(\mu - 1) \leqq 2l\mu(\mu - 1) + (\mu - 2)\Sigma q_i$$

oder mit (46)

$$4(\lambda - 1)(\mu - 1) \leqq 2l\mu(\mu - 1) + (\mu - 2)(2\lambda + 2\mu - l\mu - 2),$$

woraus folgt

$$l\mu \geqq 2(\lambda - \mu) + 2, \tag{47}$$

so daß wegen $\lambda \geqq \mu$

$$l > 0. \tag{48}$$

Da die l μ-fachen Stellen P_i auf $y = 0$ liegen und voneinander verschieden sind, so hat der Zähler $\mathfrak{M}_0$ von y mindestens $l\mu$ Schnittpunkte mit jedem $\mathfrak{H}$. Da andrerseits $(\mathfrak{M}, \mathfrak{H}) = \lambda$, so folgt, da $\langle \mathfrak{H} \rangle$ nicht den Faktor $\mathfrak{M}_0$ haben kann,

$$\lambda \geqq l\mu \tag{49}$$

und in Verbindung mit (47)

$$l\mu \geqq 2l\mu - 2\mu + 2$$

oder $l \leqq 2 - \frac{2}{\mu} < 2$.

Wegen (48) ist also

(50) $$l = 1.$$

Aus (47) ergibt sich jetzt

(51) $$3\mu - 2\lambda \geqq 2.$$

Es sei $q_1 \geqq q_i$ und Q_1 eine Stelle nullter Ordnung. Sind Q_1 und P_1 nicht in besonderer Lage, so wird durch eine F. Tr. (Q_1, P_1) das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ in ein anderes verwandelt, dessen erste Gradzahl $\lambda' = \lambda + \mu - (\mu + q_1) = \lambda' - q_1$ ist. Nach Eigenschaft 5 ist daher $\lambda - q_1 \geqq \mu$, $q_1 \leqq \lambda - \mu$, und wegen $q_1 \geqq q_i$ allgemein

(52) $$q_i \leqq \lambda - \mu.$$

Liegen Q_1 und P_1 besonders, so muß Q_1 auch auf $y = 0$ liegen. Denn x kann in Q_1 und P_1 nicht denselben Wert α haben, weil dann der Zähler $\mathfrak{L}_\alpha$ von $x - \alpha$ mehr als μ Schnittpunkte mit jedem $\mathfrak{H}$ hätte. Da Q_1 und P_1 nicht zusammenfallen, so hat der Zähler $\mathfrak{M}_0$ von y mindestens $\mu + q_1$ Schnittpunkte mit jedem $\mathfrak{H}$, so daß auch in diesem Falle

$$\lambda \geqq \mu + q_1$$

ist, also (52) gilt.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. $\lambda = \mu$, also wegen (52), und da $q_i > 0$ sein soll, $\varrho = 0$. Die Gleichung (44) ergibt mit $l = 1$, $\varrho = 0$

$$2\mu^2 = \mu^2,$$

also wegen $\mu > 0$ einen Widerspruch.

2. $\lambda > \mu$, $\lambda - \mu - 1 \geqq 0$.

Dann folgt aus (45) und (46) in Verbindung mit (52) wegen $l = 1$

$$2(\lambda - 1)(\mu - 1) \leqq \mu(\mu - 1) + (\lambda - \mu - 1) \Sigma q_i,$$

$$2(\lambda - 1)(\mu - 1) \leqq \mu(\mu - 1) + (\lambda - \mu - 1)(2\lambda + \mu - 2)$$

oder

$$\lambda(3\mu - 2\lambda) + 2(\lambda - \mu) \leqq 0.$$

Das steht aber wegen $\lambda > \mu$ im Widerspruch zu (51).

Der Fall I kann daher nicht eintreten.

§ 6. Fall II.

1. $\mu = 1$, also wegen (42) $q_i = 1$.

Nach dem Verfahren von § 4 kann man in diesem Falle erreichen: erstens, daß nur l einfache getrennt liegende Stellen P_i vorhanden sind, daß also $\varrho = 0$; zweitens, daß die P_i alle auf derselben Parallelen zur x-Achse liegen. Dazu sind nur F. Trn. notwendig, so daß x ungeändert bleibt. Die neue erste Gradzahl sei wieder mit λ bezeichnet. Wie in § 5 folgt die Ungleichung (49), die hier wegen $\mu = 1$

(53) $$\lambda \geqq l$$

lautet. Andrerseits ergibt (44) in dem jetzigen Falle ($\varrho = 0$, $\mu = 1$)

(54) $$\lambda = \frac{l}{2}.$$

Aus (53) und (54) ist zu schließen, daß $\lambda = l = 0$.

Das bedeutet, *daß man für $\mu = 1$ allein durch F. Trn., also ohne x zu ändern, das Büschel $\langle \mathfrak{H} \rangle$ in ein neues überführen kann, dessen erste Gradzahl 0 ist.*

2. $\mu = 0$.

Durch eine V. Tr. erreicht man, daß die erste Gradzahl gleich 0 ist, so daß man denselben Fall erhält wie in 1. Dieser bleibt zu untersuchen.

3. $\lambda = 0$.

In diesem Falle hängt die Funktion $\eta = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_\infty} = \frac{H_0}{H_\infty}$ nur von y ab. Da aber die Divisoren $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \eta\mathfrak{H}_\infty$ des Büschels $\langle\mathfrak{H}\rangle$ im allgemeinen Primteiler sind, so muß η eine lineare Funktion von y, d. h. $\mu = 1$ sein. Im Falle II, 1 ist das nichts Neues.

Ist

$$\eta = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_\infty} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

so wird durch die Transformation

$$x' = x, \quad y' = \frac{ay + b}{cy + d},$$

die eine F.Tr. ist, erreicht, daß $\eta = y'$ wird.

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen ist:

Es sei $\eta = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_\infty}$ eine Funktion des Körpers $K = (x, y)$. Die Divisoren $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \eta\mathfrak{H}_\infty$ des Büschels $\langle\mathfrak{H}\rangle$ mit dem Parameter η seien im allgemeinen Primteiler des Geschlechtes 0. Dann kann man durch endlich viele V. Trn. und F. Trn. statt x, y neue Veränderliche x', y' so einführen, daß $\eta = y'$ wird.

§ 7. Beweis des Noetherschen Satzes.

Durch

$$\xi = \frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{G}_\infty}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_\infty}, \tag{55}$$

wo $\frac{\mathfrak{G}_0}{\mathfrak{G}_\infty}$ und $\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_\infty}$ Funktionen des Körpers $K = (x, y)$ sind, sei eine birationale Transformation der Körper $\mathsf{K} = (\xi, \eta)$ und $K = (x, y)$ gegeben. Aus der Theorie dieser Transformationen wird als bekannt vorausgesetzt:

1. Die Büschel $\langle\mathfrak{G}\rangle$ und $\langle\mathfrak{H}\rangle$ mit den Divisoren

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 - \xi\mathfrak{G}_\infty, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \eta\mathfrak{H}_\infty$$

sind Büschel von Primteilern des Geschlechtes 0.

2. Die Zahl der mit ξ und η veränderlichen Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist 1.

Nach dem am Ende von § 6 angegebenen Satze kann man durch endlich viele V. Trn. und F. Trn. statt x, y neue Veränderliche x', y' so einführen, daß $\eta = y'$ wird. Die Transformationsformeln (55) nehmen dann die Form an

$$\xi = \frac{\mathfrak{G}'_0}{\mathfrak{G}'_\infty}, \quad \eta = y' = \frac{\mathfrak{M}'_0}{\mathfrak{M}'_\infty}, \tag{56}$$

wo $\frac{\mathfrak{G}'_0}{\mathfrak{G}'_\infty}$ eine Funktion des Körpers $K' = (x', y')$ ist. Da (56) eine birationale Transformation zwischen den Körpern $\mathsf{K} = (\xi, \eta)$ und $K' = (x', y')$ darstellt, so sind die ganzen Divisoren $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'_0 - \xi\mathfrak{G}'_\infty$ des Büschels $\langle\mathfrak{G}'\rangle$ im allgemeinen Primteiler des Geschlechtes 0. Ist $\mathfrak{G}' \sim \mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}$, so ist die Zahl der Schnittpunkte eines Divisors $\mathfrak{G}'$ und eines Divisors $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'_0 - \eta\mathfrak{M}'_\infty$ des Büschels $\langle\mathfrak{M}'\rangle$ gleich $(\mathfrak{M}', \mathfrak{L}'^{\lambda'}\mathfrak{M}'^{\mu'}) = \lambda'$. Da das Büschel $\langle\mathfrak{M}'\rangle$ keine festen Schnittpunkte hat, so ist λ' auch die Zahl der beweglichen Schnittpunkte eines Divisors aus $\langle\mathfrak{G}'\rangle$ und eines aus $\langle\mathfrak{M}'\rangle$, so daß $\lambda' = 1$ sein muß.

Daher befindet sich das Büschel $\langle \mathfrak{G}' \rangle$ in dem Falle II, 1 des § 6, nur daß x und y vertauscht sind. Bezeichnet man die Transformation, die aus einer F. Tr. durch eine V. Tr. entsteht, mit F. Tr. zweiter Art, so gilt nach § 6: Durch endlich viele F. Trn. zweiter Art, *bei denen also y' ungeändert bleibt*, kann man an Stelle von x' eine neue Veränderliche $\overline{x}$ so einführen, daß $\xi = \overline{x}$ wird. Bezeichnet man der Gleichmäßigkeit halber y' mit $\overline{y}$, so lauten die Transformationsformeln jetzt:

$$\xi = \overline{x}, \qquad \eta = \overline{y}.$$

Das ist aber die identische Transformation. Damit hat sich ergeben, daß sich jede Cremona-Transformation der Ebene durch endlich viele V. Trn. und F. Trn. in die Identität verwandeln läßt. Da aber die zu den V. Trn. und F. Trn. entgegengesetzten Transformationen auch V. Trn. und F. Trn. sind, so folgt der Noethersche Satz in der Fassung, daß sich jede Cremona-Transformation der Ebene aus endlich vielen V. Trn. und F. Trn. zusammensetzen läßt.

Eingegangen 1. September 1938.

Über den Satz von Jordan-Hölder-Schreier.

Von *Erich George* in Schneidemühl.

In verschiedenen Zweigen der Mathematik, vor allem in der Algebra und der Geometrie, kennt man Beziehungen zwischen gewissen ausgezeichneten Teilmengen der betrachteten Gebilde, deren Eigenschaften einander sehr ähnlich sind. Das Streben, diese Übereinstimmungen auf ihre gemeinsamen Wurzeln zurückzuführen, hat auf den Begriff des *Verbandes* geführt[1]). Ein Verband ist eine Menge, in der eine Beziehung $X > Y$ zwischen den Elementen definiert ist, die einige einfache, später genauer anzugebende Eigenschaften besitzen, z. B. *transitiv* sein soll.

Eine spezielle Klasse von Verbänden bilden die Dedekindschen Verbände. Für sie läßt sich ein dem Satz von Jordan-Hölder-Schreier der Gruppentheorie entsprechender Satz beweisen. Dieser Satz sollte also die gemeinsame Grundlage der Sätze von der Art des Jordan-Hölder-Schreierschen Satzes darstellen. Er umfaßt in der Tat mehrere mit dem Satz von Jordan-Hölder-Schreier verwandte Sätze. Aber gerade den Satz von Jordan-Hölder-Schreier selbst umfaßt er nicht. Dieser Satz beschäftigt sich nämlich mit der Beziehung zwischen den Untergruppen einer Gruppe und ihren Normalteilern, und diese Beziehung ist im allgemeinen keine Verbandsbeziehung, da sie schon nicht transitiv zu sein braucht. Der Begriff des Verbandes ist also für diesen Fall zu eng.

Es soll hier gezeigt werden, daß sich der Begriff des Verbandes ohne Zerstörung seiner wesentlichsten Eigenschaften so verallgemeinern läßt, daß nunmehr die Beziehung zwischen den Untergruppen einer Gruppe und ihren Normalteilern und insbesondere der Satz von Jordan-Hölder-Schreier umfaßt wird.

§ 1. Beziehungen.

1. $\mathfrak{M}$ sei eine Menge. Als eine *Beziehung in $\mathfrak{M}$ mit dem Zeichen $>$*, kurz eine *Beziehung $>$*, bezeichnen wir eine Vorschrift, die gewissen Paaren A, B von Elementen aus $\mathfrak{M}$ eine Aussage $A > B$ zuordnet. Statt $A > B$ schreiben wir auch $B < A$.

Gilt $A > B$, so nennen wir A ein *Oberelement von B*, B ein *Unterelement von A*.

2. Die Beziehung $>$ heißt *reflexiv*, wenn stets $A > A$ gilt. Sie heißt *symmetrisch*, wenn aus $A > B$ stets $B > A$ folgt. Sie heißt *asymmetrisch*, wenn aus $A > B$ und $B > A$ stets $A = B$ folgt. Sie heißt schließlich *transitiv*, wenn aus $A > B$ und $B > C$ stets $A > C$ folgt.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Beziehung heißt eine *Spaltung*. Sie zerlegt $\mathfrak{M}$ in elementfremde *Klassen*.

3. Gilt $A > A_1 > A_2 > \cdots > A_n$, so nennen wir die Folge $A, A_1, \ldots, A_n$ eine *Kette von A nach A_n*, genauer eine $>$-Kette. Die Zahl n heißt *Länge der Kette*.

[1]) Man vergleiche den zusammenfassenden Bericht von G. Köthe, Die Theorie der Verbände, Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinig. **47** (1937), S. 125—144.

4. Aus einer Beziehung $>$ lassen sich mancherlei weitere Beziehungen ableiten. Wir benutzen vor allem folgende:

a) Die Beziehung $<$ nennen wir *zu* $>$ *invers.*

b) Wir nennen zwei Elemente A, B *unmittelbar zusammenhängend* in bezug auf $>$, wenn wenigstens eine der Relationen $A > B$, $B > A$ gilt, und schreiben $A \gtrless B$.

c) Wir sagen, A *ist mit* B *verkettet (genauer* $>$*-verkettet)*, wenn es eine $>$-Kette von A nach B gibt.

d) Gibt es eine $\gtrless$-Kette von A nach B, so nennen wir die Elemente A, B *zusammenhängend* in bezug auf $>$.

5. Die Beziehung $\gtrless$ ist stets symmetrisch, aber im allgemeinen nicht transitiv. Die Beziehung zwischen *verketteten* Elementen ist stets transitiv, aber im allgemeinen nicht symmetrisch. Die Beziehung zwischen *zusammenhängenden* Elementen ist stets sowohl symmetrisch als auch transitiv. Besitzt jedes Element aus $\mathfrak{M}$ wenigstens ein Unter- oder Oberelement, so ist sie auch reflexiv.

Man kann stets erreichen, daß jedes Element aus $\mathfrak{M}$ wenigstens ein Unter- oder Oberelement besitzt, indem man alle Elemente aus $\mathfrak{M}$ hinauswirft, die von der Beziehung $>$ nicht berührt werden, also uninteressant sind. Wir werden uns nur mit solchen Beziehungen beschäftigen, in denen dies bereits geschehen ist. Dann ist die Beziehung zwischen zusammenhängenden Elementen eine *Spaltung*. Sie zerlegt $\mathfrak{M}$ in *Zusammenhangsklassen*. Je zwei Elemente einer Zusammenhangsklasse lassen sich durch eine $\gtrless$-Kette verbinden, dagegen sind zwei verschiedene Zusammenhangsklassen in bezug auf $\gtrless$ unabhängig. Es bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, daß sich je zwei Elemente von $\mathfrak{M}$ durch eine $\gtrless$-Kette verbinden lassen.

Wir nennen deshalb eine Beziehung $>$ *zusammenhängend*, wenn je zwei Elemente von $\mathfrak{M}$ in bezug auf $>$ zusammenhängend sind. *Wir setzen im folgenden stets voraus, daß* $>$ *eine zusammenhängende, asymmetrische, reflexive Beziehung ist.*

6. $\mathfrak{A}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

Definition. Ein Element V heißt *Vereinigung von* $\mathfrak{A}$, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

a) $V > A$ für jedes A aus $\mathfrak{A}$.

b) Gilt $V' > A$ für jedes A aus $\mathfrak{A}$, so gilt $V' > V$.

Ein Element D heißt *Durchschnitt von* $\mathfrak{A}$, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

a) $A > D$ für jedes A aus $\mathfrak{A}$.

b) Gilt $A > D'$ für jedes A aus $\mathfrak{A}$, so gilt $D > D'$.

Wegen der Asymmetrie kann $\mathfrak{A}$ höchstens eine Vereinigung und höchstens einen Durchschnitt besitzen.

Besitzt die *ganze* Menge $\mathfrak{M}$ eine Vereinigung V bzw. einen Durchschnitt D, so nennen wir V *Erstelement* bzw. D *Letztelement* von $\mathfrak{M}$. Dann ist V Oberelement, D Unterelement jedes Elementes aus $\mathfrak{M}$.

Besitzt eine *endliche* Teilmenge $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ eine Vereinigung V bzw. einen Durchschnitt D, so schreiben wir

$$V = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

7. Beschränkt man sich auf Bildungen der Form $A \cup B$ und $A \cap B$, so kann man die Zeichen $\cup$ und $\cap$ als Symbole zweier nur für gewisse Elementpaare definierten Verknüpfungen ansehen. Beide sind kommutativ. Aus der Reflexivität erhält man folgende Eigenschaften dieser Verknüpfungen:

a) *Stets ist* $A \cup A = A \cap A = A$.

b) *Jede der Aussagen*

$$A > B, \quad A \cup B = A, \quad A \cap B = B$$

hat die beiden anderen zur Folge.

c) *Existiert* $A \cup B$ *bzw.* $A \cap B$, *so gilt*

$$A \cap (A \cup B) = A \quad \text{bzw.} \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

8. Durch mehrfache Anwendung unserer Verknüpfungen auf eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ erhalten wir den Begriff des Elements über $\mathfrak{A}$, den wir wie folgt durch Induktion definieren:

Definition. $\mathfrak{A}$ sei eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$.

a) Ist A ein Element aus $\mathfrak{A}$, so nennen wir den *Buchstaben* A ein *eingliedriges, sinnvolles Symbol über* $\mathfrak{A}$. Das *Symbol* A *stellt das Element* A *dar.*

b) Ist $\mathfrak{S}_1$ ein m-gliedriges, $\mathfrak{S}_2$ ein n-gliedriges Symbol über $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir $(\mathfrak{S}_1) \cup (\mathfrak{S}_2)$ und $(\mathfrak{S}_1) \cap (\mathfrak{S}_2)$ als $(m+n)$*-gliedrige Symbole über* $\mathfrak{A}$. Die Klammern dürfen unterdrückt werden, wenn sie ein eingliedriges Symbol einschließen.

c) Sind $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ sinnvolle Symbole und S_1 bzw. S_2 die durch sie dargestellten Elemente, so nennen wir das Symbol

$$\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1) \cup (\mathfrak{S}_2) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1) \cap (\mathfrak{S}_2)$$

sinnvoll, wenn $S = S_1 \cup S_2$ bzw. $S = S_1 \cap S_2$ existiert. S heißt dann *das durch* $\mathfrak{S}$ *dargestellte Element.*

d) Jedes durch ein sinnvolles Symbol über $\mathfrak{A}$ darstellbare Element heißt ein *Element über* $\mathfrak{A}$.

§ 2. Halbverbände.

A. Verbände.

1. **Definition.** *Eine Menge, für die eine reflexive, asymmetrische und transitive Beziehung* $>$ *definiert ist, heißt ein Verband, wenn für je zwei ihrer Elemente* A, B *stets sowohl* $A \cup B$ *als auch* $A \cap B$ *existiert.*

Wegen $A > A \cap B < B$ ist jede Verbandsbeziehung zusammenhängend.

2. Die durch eine Verbandsbeziehung $>$ bestimmten Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ haben folgende Eigenschaften:

a) Je zwei Elemente A, B bestimmen eindeutig zwei Elemente $A \cup B$ und $A \cap B$.

b) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

c) $A \cup A = A \cap A = A.$

d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

e) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A.$

Der Verband läßt sich auch mit Hilfe dieser Eigenschaften der Verbandsverknüpfungen definieren. Die angegebene Definition[2]) erscheint mir natürlicher, da in den Anwendungen gewöhnlich die Verbandsbeziehung der primäre Begriff ist.

3. Der Begriff des Verbandes ist mit sich selbst dual, d. h. er ändert sich nicht, wenn man die inversen Zeichen $>, <$ und $\cup, \cap$ miteinander vertauscht. Jede richtige Aussage über Verbände bleibt also richtig, wenn man in ihr jedes Zeichen mit dem inversen vertauscht.

4. Ein *Dedekindscher Verband* ist ein Verband, in dem die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind, von denen jede die andere nach sich zieht:

a) Aus $A > C > A \cap B$ folgt $C = A \cap (B \cup C)$.

b) Aus $A \cup B > C > A$ folgt $C = A \cup (B \cap C)$.

Auch der Begriff des Dedekindschen Verbandes ist mit sich selbst dual.

---

[2]) O. Ore, On the foundation of abstract algebra. I., Annals of Math. **36** (1935), S. 406—437.

Über die allgemeinen Eigenschaften der Verbände, insbesondere der Dedekindschen, vergleiche man z. B. die soeben genannte Arbeit von O. Ore. Wir gehen hier sogleich dazu über, den Begriff des Verbandes so zu verallgemeinern, daß wesentliche Eigenschaften der Verbände unzerstört bleiben.

B. Halbverbände.

1. *Wir nennen zwei Elemente A und B verwandt, wenn sie wenigstens ein gemeinsames Oberelement Z besitzen:* $Z > A$, $Z > B$.

Existiert $A \cup B$, so ist A mit B verwandt. Umgekehrt braucht $A \cup B$ natürlich nicht zu existieren, wenn A mit B verwandt ist.

Aus der Reflexivität folgt, daß jedes Element mit sich selbst und mit jedem Unter- oder Oberelement verwandt ist.

2. Von einem Verband verlangten wir vor allem, daß die Verbandsverknüpfungen stets definiert sind und daß die Verbandsbeziehung transitiv ist. Die Transitivität läßt sich dabei auch wie folgt aussprechen: Ist A mit B verkettet, so ist $A > B$. Beide Forderungen wollen wir nun abschwächen.

Definition. *Eine Menge, für die eine zusammenhängende, reflexive, asymmetrische Beziehung* $>$ *definiert ist, nennen wir einen Halbverband, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

I) *Ist A mit B verkettet und verwandt, so ist* $A > B$.

II) *Sind A und B verwandte Elemente, so existiert sowohl* $A \cup B$ *als auch* $A \cap B$.

III) *Sind A, B, C paarweise verwandte Elemente, so ist C sowohl mit* $A \cup B$ *als auch mit* $A \cap B$ *verwandt.*

Jeder Verband ist ein Halbverband, und zwar sowohl in bezug auf die Beziehung $>$ als auch in bezug auf die inverse Beziehung $<$.

Der Begriff des Halbverbandes ist nicht mit sich selbst dual. Durch den Begriff der Verwandtschaft wird eine Unsymmetrie hineingetragen.

Wir setzen von jetzt ab stets voraus, daß $\mathfrak{M}$ ein Halbverband, $>$ *die Halbverbandsbeziehung ist.*

3. **Beispiel 1.** $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, $\mathfrak{G}^*$ die Menge ihrer Untergruppen. Wir definieren eine Beziehung in $\mathfrak{G}^*$:

Es sei $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, *wenn* $\mathfrak{B}$ *Untergruppe von* $\mathfrak{A}$ *ist.*

$\mathfrak{G}^*$ ist in bezug auf $>$ ein *Verband*. Der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Sinne der Gruppentheorie ist auch Durchschnitt $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ im Sinne der Verbandsverknüpfungen. Vereinigung $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ist die von dem Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe. Übrigens ist dieser Verband im allgemeinen kein Dedekindscher Verband, wie schon das Beispiel der alternierenden Permutationsgruppe in 4 Elementen zeigt.

4. **Beispiel 2.** $\mathfrak{G}^*$ sei dieselbe Menge wie im Beispiel 1. Wir definieren jetzt eine andere Beziehung:

Es sei $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, *wenn* $\mathfrak{A}$ *normale Obergruppe von* $\mathfrak{B}$, *d. h.* $\mathfrak{B}$ *Normalteiler von* $\mathfrak{A}$ *ist.*

Wir behaupten:

$\mathfrak{G}^*$ *ist in bezug auf* $>$ *ein Halbverband mit Letztelement.*

Beweis. a) $\mathfrak{A} > \mathfrak{A}_1 > \mathfrak{A}_2 > \cdots > \mathfrak{B}$ sei eine Kette von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ sei mit $\mathfrak{B}$ verwandt, d. h. es gebe eine Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, die normale Obergruppe von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}$ ist. Dann ist $\mathfrak{B}$ Untergruppe, also Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Die Bedingung I ist also erfüllt.

b) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien verwandte Elemente aus $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}'$ eine gemeinsame normale Obergruppe. Dann sind bekanntlich das Produkt $\mathfrak{V} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und der Durchschnitt $\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ Normalteiler von $\mathfrak{G}'$. Jeder gemeinsame Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist

Normalteiler von $\mathfrak{D}$. Jede gemeinsame normale Obergruppe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist normale Obergruppe von $\mathfrak{V}$. Demnach ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. Die Bedingung II ist also erfüllt.

c) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ seien paarweise verwandte Elemente aus $\mathfrak{G}^*$. Dann ist $\mathfrak{B}$ in einer normalen Obergruppe von $\mathfrak{A}$ enthalten, also $\mathfrak{A}$ mit jedem Element aus $\mathfrak{B}$ vertauschbar. Dies gilt für je zwei der drei Gruppen. Daher ist das Produkt $\mathfrak{ABC}$ eine gemeinsame normale Obergruppe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Nicht nur $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, sondern auch $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ sind Normalteiler von $\mathfrak{ABC}$, also ist $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ verwandt. Damit ist gezeigt, daß auch die Bedingung III erfüllt ist.

d) Es ist klar, daß das Einselement von $\mathfrak{G}$, als Untergruppe $\mathfrak{E}$ aufgefaßt, Letztelement ist. Aus dem Bestehen eines Letztelements folgt dann, daß die Relation $>$ zusammenhängend ist, denn für je zwei Elemente $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{G}^*$ gilt $\mathfrak{A} > \mathfrak{E} < \mathfrak{B}$.

5. **Beispiel 3.** Die Fig. 1 zeigt einen Halbverband, der kein Letztelement besitzt. Die Beziehung $A > B$ ist durch den Pfeil von A nach B zum Ausdruck gebracht worden.

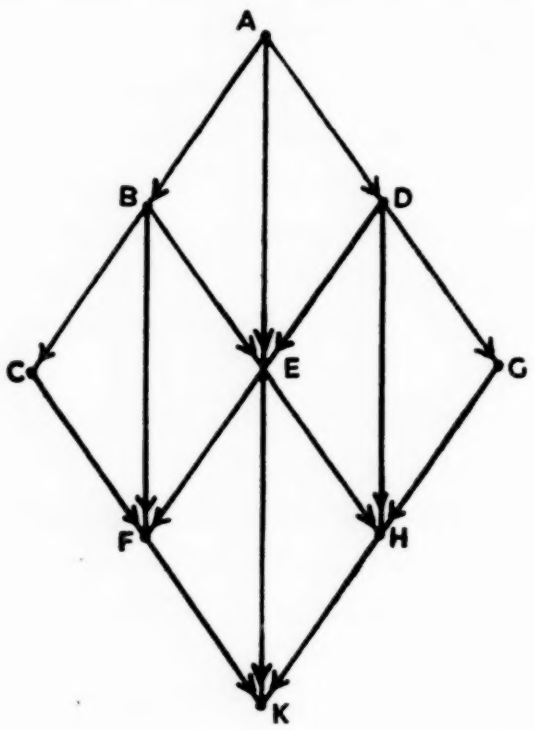


Fig. 1.

6. **Satz 1.** *Aus* $A > A_1 > A_2 > \cdots > A_n > B$ *und* $A > B$ *folgt* $A_\nu > B$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Folgt aus der Bedingung I durch Induktion.

7. **Satz 2.** *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine Menge paarweise verwandter Elemente aus einem Halbverband, so ist jedes Symbol über* $\mathfrak{A}$ *sinnvoll. Die Menge aller Elemente über* $\mathfrak{A}$ *ist ein Verband.*

Beweis. Der Satz ist bewiesen, sobald gezeigt ist, daß für jedes n folgende Aussagen gelten:

a) Jedes Symbol über $\mathfrak{A}$ von höchstens n Gliedern ist sinnvoll.

b) Zwei Elemente, die durch Symbole über $\mathfrak{A}$ von höchstens n Gliedern dargestellt werden können, sind verwandt.

Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Wir beweisen ihn durch Induktion über n allgemein.

$\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1) \cup (\mathfrak{S}_2)$ bzw. $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S}_1) \cap (\mathfrak{S}_2)$ sei ein n-gliedriges Symbol. $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ haben weniger als n Glieder, sind also sinnvoll und stellen zwei verwandte Elemente S_1 und S_2 dar. Daher existiert das Element $S = S_1 \cup S_2$ bzw. $S = S_1 \cap S_2$. $\mathfrak{S}$ ist also sinnvoll. Jedes durch ein höchstens $(n-1)$-gliedriges Symbol dargestellte Element ist mit S_1 und mit S_2, nach III also mit S verwandt. Ist S' ein durch ein zweites n-gliedriges Symbol $(\mathfrak{S}_1') \cup (\mathfrak{S}_2')$ oder $(\mathfrak{S}_1') \cap (\mathfrak{S}_2')$ dargestelltes Element, so ist S mit den durch $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$

dargestellten Elementen, nach III also mit S' verwandt. Es ist also jedes durch ein n-gliedriges Symbol über $\mathfrak{A}$ dargestellte Element mit jedem durch ein höchstens n-gliedriges Symbol über $\mathfrak{A}$ dargestellten verwandt. Damit ist unser Satz bewiesen.

8. **Satz 3.** *Ist* $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *eine endliche Menge paarweise verwandter Elemente, so gibt es eine Vereinigung und einen Durchschnitt von* $\mathfrak{A}$. *Beide Elemente sind Elemente über* $\mathfrak{A}$, *und es gilt*

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = A_1 \cap (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n).$$

Beweis. Für $n = 2$ ist der Satz mit der Bedingung II identisch. Wir beweisen ihn allgemein durch Induktion über n.

Es sei $V_1 = A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Dann ist V_1 ein Element über $\mathfrak{A}$, also mit A_1 verwandt. Demnach existiert $V = A_1 \cup V_1$. Auch V ist ein Element über $\mathfrak{A}$, also mit jedem A_ν verwandt. Aus $V > V_1 > A_\nu$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ folgt also wegen I die Relation $V > A_\nu$. Wegen $V > A_1$ gilt also $V > A_\nu$ für jedes A_ν aus $\mathfrak{A}$.

Gilt andererseits $V' > A_\nu$ für jedes A_ν aus $\mathfrak{A}$, so gilt $V' > V_1$ wegen der Definition von V_1 und daher weiter $V' > V$. Demnach ist $V = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Damit ist der Satz für die Vereinigung von $\mathfrak{A}$ bewiesen. Ebenso wird er, unter Vertauschung der Zeichen mit den inversen, für den Durchschnitt bewiesen.

9. Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 3 ist der

Satz 4. *Sind* A, B, C *paarweise verwandte Elemente, so gilt*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

10. **Satz 5.** *Gilt* $A > B$ *und ist* C *mit* A *und mit* B *verwandt, so gilt* $A \cup C > B \cup C$, $A \cap C > B \cap C$.

Beweis. Die Elemente A, B, C sind paarweise verwandt. Da die Menge aller Elemente über (A, B, C) ein Verband ist, so kann der Beweis wie in Verbänden geführt werden. Es ist z. B.

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = (A \cup C \cup B \cup C) = (A \cup B) \cup (C \cup C) = A \cup C,$$

also gilt $A \cup C > B \cup C$.

11. **Satz 6.** *Ist* $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots, A_n$ *eine endliche Menge paarweise verwandter Elemente und* S *ein Element über* $\mathfrak{A}$, *so ist jedes gemeinsame Oberelement (Unterelement) von* $\mathfrak{A}$ *Oberelement (Unterelement) von* S.

Beweis. Z sei ein gemeinsames Oberelement von $\mathfrak{A}$. Dann ist zunächst $Z > A_\nu \cup A_\mu$ für jedes ν, μ. Weiter gilt $Z > A_\nu > A_\nu \cap A_\mu$. Hieraus folgt $Z > A_\nu \cap A_\mu$, da Z mit A_ν und mit A_μ, also auch mit $A_\nu \cap A_\mu$ verwandt ist. Durch einen Induktionsschluß erhält man die Behauptung für gemeinsame Oberelemente. Ebenso beweist man sie für gemeinsame Unterelemente.

Aus dem Satz 6 folgt insbesondere der

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots, A_n$ *eine endliche Menge paarweise verwandter Elemente, so gilt für jedes Element* S *über* $\mathfrak{A}$ *die Relation*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n > S > A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

Die Menge der Elemente über $\mathfrak{A}$ *ist ein Verband mit dem Erstelement*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

und dem Letztelement

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

C. Dedekindsche Halbverbände.

1. Gilt $A > B > C$, so nennen wir B ein *Element zwischen A und C.*

Definition. *Ein* **Dedekindscher Halbverband** *ist ein Halbverband, der folgende Bedingungen erfüllt:*

IV) *Ist A mit B verwandt, so ist B mit jedem Element zwischen A und $A \cap B$ verwandt.*

V) *Ist A mit B verwandt und C ein Element zwischen A und $A \cap B$, so gilt*

$$C = A \cap (B \cup C).$$

Der Halbverband aus Beispiel 3 ist ein Dedekindscher Halbverband.

2. **Satz 8.** *Ein Halbverband, der die Bedingung* IV *erfüllt, ist dann und nur dann ein Dedekindscher Verband, wenn die folgende, aus* V *durch Vertauschung inverser Zeichen hervorgehende Aussage gilt:*

V′) *Ist A mit B verwandt und C ein Element zwischen $A \cup B$ und A, so gilt*

$$C = A \cup (B \cup C).$$

Beweis. a) Wir bemerken zunächst, daß die in V und V′ benutzten Symbole sinnvoll sind, weil die Elemente A, B und C paarweise verwandt sind. In V ist C wegen $A > C$ mit A und wegen IV mit B verwandt. In V′ ist C wegen $C > A$ mit A und wegen $A \cup B > C$ und $A \cup B > B$ mit B verwandt. Daher können wir auch wie in Verbänden schließen:

b) *Aus* V *folgt* V′.

Es sei $A \cup B > C > A$. Aus $C > A$ und $C > B \cap C$ folgt $C > A \cup (B \cap C)$. Demnach ist $A \cup (B \cap C)$ ein Element zwischen C und $B \cap C$, und nach V ist

$$A \cup (B \cap C) = C \cap (B \cup A \cup (B \cap C)). \tag{1}$$

Aus $B \cup A > C > B \cap C$ folgt, da $B \cup A$ mit $B \cap C$ verwandt ist (Satz 7), $B \cup A > B \cap C$. Es ist also $B \cup A \cup (B \cap C) = B \cup A$, und wegen $B \cup A > C$ ist $C \cap (B \cup A) = C$. Gleichung (1) geht also über in $A \cup (B \cap C) = C$.

c) *Aus* V′ *folgt* V.

Der Beweis entsteht aus b) durch Vertauschung inverser Zeichen.

3. Aus dem Satz 7 folgt:

Satz 9. *Jede Aussage über endlich viele Elemente eines (Dedekindschen) Verbandes gilt auch in (Dedekindschen) Halbverbänden, wenn man voraussetzt, daß die Elemente paarweise verwandt sind.*

4. **Beispiel 4.** *Der Halbverband aus Beispiel 2 ist ein Dedekindscher Halbverband.*

Beweis. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien verwandte Elemente aus $\mathfrak{G}^*$, also Normalteiler einer Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Mit A, A_1 bezeichnen wir im folgenden stets Elemente aus $\mathfrak{A}$, mit B, B_1 Elemente aus $\mathfrak{B}$.

a) *Aus* $AB = A_1B_1$ *folgt*

$$A\mathfrak{D} = A_1\mathfrak{D} \quad \textit{und} \quad B\mathfrak{D} = B_1\mathfrak{D}. \tag{2}$$

Aus $AB = A_1B_1$ folgt nämlich $A_1^{-1}A = B_1B^{-1} = D$, also ist D ein Element aus $\mathfrak{D}$. Aus $A = A_1D$, $B_1 = DB$ folgt (2) durch Multiplikation mit $\mathfrak{D}$.

b) *Es ist stets*

$$AB\mathfrak{D} = BA\mathfrak{D}. \tag{3}$$

$B^{-1}AB$ ist nämlich ein Element aus $\mathfrak{A}$, $A^{-1}B^{-1}A$ ein Element aus $\mathfrak{B}$. Daher ist $A^{-1}B^{-1}AB$ ein Element D aus $\mathfrak{A}$ und aus $\mathfrak{B}$, also aus $\mathfrak{D}$. Aus $AB = BAD$ folgt (3).

c) Nunmehr sei $\mathfrak{C}$ ein Element zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, also Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und Obergruppe von $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{C} > \mathfrak{D}.$$

Mit C, C_1 bezeichnen wir Elemente aus $\mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist, so ist das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}'$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{C}$ Normalteiler von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist.

$V = BC$ sei irgendein Element aus $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, C_1 eines aus $\mathfrak{C}$. Wegen (3) gilt dann $VC_1V^{-1}\mathfrak{D} = CC_1C^{-1}BB^{-1}\mathfrak{D} = CC_1C^{-1}\mathfrak{D}$. Daher ist VC_1V^{-1} ein Element aus $CC_1C^{-1}\mathfrak{D}$, umsomehr aus $\mathfrak{C}$, also ist $\mathfrak{C}$ Normalteiler von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Andererseits ist $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}'$, also erst recht von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Demnach ist $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$. Die Bedingung IV ist erfüllt.

d) $\mathfrak{C}'$ sei der Durchschnitt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ im Sinne der Gruppentheorie. Ist BC ein in $\mathfrak{A}$ enthaltenes Element aus $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, also $BC = A = EA$, wo E das Einselement ist, so gilt nach (2) $B\mathfrak{D} = E\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$.

Demnach ist B ein Element aus $\mathfrak{D}$, also A ein Element aus $\mathfrak{C}$. Folglich ist $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{C}$ enthalten. Andererseits ist $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, also in $\mathfrak{C}'$ enthalten. Daher ist $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$. Schließlich ist $\mathfrak{C}$ Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Also ist $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A} \cap (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$. Es gilt also V.

§ 3. Ähnliche Ketten.

Wir setzen von jetzt ab voraus, daß $\mathfrak{M}$ ein Dedekindscher Halbverband ist.

1. **Definition.** *Gilt $A > B$, so nennen wir die Menge der Elemente zwischen A und B den Quotienten* $\frac{A}{B}$.

Der Quotient $\frac{A}{B}$ besteht also aus allen Elementen C, die der Relation $A > C > B$ genügen. Aus Satz 6 folgt, daß er ein Verband ist. Ist $\mathfrak{M}$ ein Verband, so enthält $\frac{A}{B}$ wegen der Transitivität auch sämtliche Elemente jeder Kette von A nach B, deren Länge größer als 2 ist. In Halbverbänden kann man aus $A > A_1 > A_2 > \cdots > A_n = B$ und $A > B$ zwar schließen, daß A_1 dem Quotienten $\frac{A}{B}$ angehört, denn nach Satz 1 gilt $A > A_1 > B$. Die Elemente $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ werden dem Quotienten dagegen im allgemeinen nicht angehören.

2. Es sei $\mathfrak{M}^*$ die Menge aller Quotienten von $\mathfrak{M}$. Wir definieren eine *Beziehung in $\mathfrak{M}^*$:*

Definition. *Es sei* $\frac{A}{B} > \frac{A'}{B'}$, *wenn* $A = A' \cup B$ *und* $B' = A' \cap B$ *ist.*

Diese Beziehung ist reflexiv, denn aus $A > B$ folgt $A = A \cup B$ und $B = A \cap B$, also $\frac{A}{B} > \frac{A}{B}$. Sie ist übrigens auch asymmetrisch. Dagegen ist sie im allgemeinen nicht zusammenhängend. Sie gibt also nach § 1 Anlaß zu einer Spaltung von $\mathfrak{M}^*$ in Zusammenhangsklassen. *Diese Klassen heißen hier Ähnlichkeitsklassen. In bezug auf die Beziehung $>$ zusammenhängende Quotienten heißen ähnlich.* Zwei Quotienten sind also dann und nur dann ähnlich, wenn sie sich durch eine $\gtrless$-Kette verbinden lassen.

3. **Satz 10.** *Zwei Quotienten* $\frac{A}{B}$ *und* $\frac{A'}{B'}$, *für die* $\frac{A}{B} > \frac{A'}{B'}$ *gilt, lassen sich so eineindeutig aufeinander abbilden, daß für je zwei entsprechende Elemente C und C' die Relationen* $\frac{A}{C} > \frac{A'}{C'}$ *und* $\frac{C}{B} > \frac{C'}{B'}$ *gelten.*

Beweis. Es ist $A = A' \cup B$ und $B' = A' \cap B$. Wir bezeichnen mit α die Abbildung, die jedem Element C zwischen A und B das Element $C' = A' \cap C$ zuordnet. α'

sei die Abbildung, die jedem Element C' zwischen A' und B' das Element $C = B \cup C'$ zuordnet.

a) Aus $A > C > B$ folgt $A' \cap A > A' \cap C > A' \cap B$ (Satz 5), also $A' > C' > B'$. Demnach ist α eine Abbildung von $\frac{A}{B}$ in $\frac{A'}{B'}$.

b) Aus $A' > C' > B'$ folgt $B \cup A' > B \cup C' > B \cup B'$, also $A > C > B$. Daher ist α' eine Abbildung von $\frac{A'}{B'}$ in $\frac{A}{B}$.

c) Ist $A > C > B$, so ist C ein Element zwischen $B \cup A'$ und B. Nach Bedingung V' ist also $C = B \cup (A' \cap C) = B \cup C'$. Die Abbildung α ist also eineindeutig und α' ist ihre Umkehrung.

d) Es sei C ein Element zwischen A und B, ferner $C' = A' \cap C$ das ihm durch α zugeordnete Element zwischen A' und B'. Aus $A > C > B$ folgt

$$A' \cup A > A' \cup C > A' \cup B, \text{ also } A > A' \cup C > A, \; A = A' \cup C.$$

Wegen $C' = A' \cap C$ ist also $\frac{A}{C} > \frac{A'}{C'}$.

Aus $A' > C' > B'$ folgt $B \cap A' > B \cap C' > B \cap B'$, $B' > B \cap C' > B'$, $B' = B \cap C'$.

Wegen $C = B \cup C'$ ist also $\frac{C}{B} > \frac{C'}{B'}$.

4. **Definition.** Zwei Quotienten $\frac{A}{B}$ und $\frac{A'}{B'}$ heißen *unmittelbar ähnlich*, wenn $\frac{A}{B} \gtrless \frac{A'}{B'}$ gilt. Allgemeiner heißen zwei Ketten

$$A_0 > A_1 > \cdots > A_n \quad \text{und} \quad B_0 > B_1 > \cdots > B_n$$

unmittelbar ähnlich, wenn die Relationen $\frac{A_{\nu-1}}{A_\nu} \gtrless \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ gelten.

Satz 11. *Sind $\frac{A}{B}$ und $\frac{A'}{B'}$ unmittelbar ähnliche Quotienten, so läßt sich zu jeder Kette von A nach B eine unmittelbar ähnliche Kette von A' nach B' finden.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{K} = A > A_1 > A_2 > \cdots > A_n = B$ eine Kette von A nach B. Für $n = 2$ ist der Satz mit Satz 10 identisch. Wir beweisen ihn allgemein durch Induktion über n. Nach Satz 1 gilt $A > A_1 > B$. Nach Satz 10 gibt es also ein Element A_1', so daß $A' > A_1' > B'$ ist und $\frac{A}{A_1}$ mit $\frac{A'}{A_1'}$, $\frac{A_1}{B}$ mit $\frac{A_1'}{B}$ unmittelbar ähnlich ist. Die Kette $A_1 > A_2 > \cdots > A_n = B$ hat die Länge $n - 1$, nach der Induktionsvoraussetzung existiert also eine mit dieser Kette unmittelbar ähnliche Kette $A_1' > A_2' > \cdots > A_n' = B'$. Dann ist $A' > A_1' > A_2' > \cdots > A_n'$ eine mit $\mathfrak{K}$ unmittelbar ähnliche Kette von A' nach B'.

5. Jede Kette $A_0 > A_1 > \cdots > A_n$ der Länge n bestimmt n Quotienten $\frac{A_{\nu-1}}{A_\nu}$ und damit n Ähnlichkeitsklassen, die nicht notwendig alle von einander verschieden zu sein brauchen.

Definition. *Zwei Ketten (gleicher Länge) heißen ähnlich, wenn sie bis auf die Reihenfolge die gleichen Ähnlichkeitsklassen bestimmen.*

Zwei unmittelbar ähnliche Ketten sind ähnlich.

6. Kommt jedes Glied einer Kette $\mathfrak{K}$ von A nach B in einer zweiten Kette $\mathfrak{K}_1$ von A nach B vor, so nennen wir $\mathfrak{K}_1$ eine *Verfeinerung* von $\mathfrak{K}$.

Aus dem Satz 11 folgt dann sofort der

Satz 12. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ähnliche Ketten, so läßt sich zu jeder Verfeinerung von $\mathfrak{A}$ eine ähnliche Verfeinerung von $\mathfrak{A}'$ finden.*

7. Nunmehr kann man den Satz von Schreier für Halbverbände in der üblichen Weise durch einen Induktionsschluß beweisen.

Satz 13. *Ist $A > B$, so besitzen je zwei Ketten von A nach B ähnliche Verfeinerungen.*

Beweis [3]). Es seien

$$\mathfrak{A} = A > A_1 > A_2 > \cdots > A_m = B,$$
$$\mathfrak{A}' = A > B_1 > B_2 > \cdots > B_n = B$$

zwei Ketten von A nach B.

a) Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Wir beweisen ihn zunächst für $n = 2$ durch einen Induktionsschluß über m.

A_1 ist B_1 verwandt. Wir setzen $V = A_1 \cup B_1$, $D = A_1 \cap B_1$. Es ist $\mathfrak{A}' = A > B_1 > B$. Wegen Satz 1 gilt $A_1 > B$. Also ist $D > B$. Die Ketten $A_1 > A_2 > \cdots > A_m$ und $A_1 > D > B$ besitzen ähnliche Verfeinerungen, da die erste von ihnen die Länge $m - 1$ hat. Es gibt also zwei ähnliche Ketten

$$\mathfrak{A}_1 = A > V > A_1 - - A_2 - \cdots - A_m = B,$$
$$\mathfrak{A}_2 = A > V > A_1 : : D : : B$$

(Die Zeichen - - und : : deuten Verfeinerungen an). Die Ketten

$$\mathfrak{A}_3 = A > V > A_1 > D > B,$$
$$\mathfrak{A}_4 = A > V > B_1 > D > B$$

sind ähnlich wegen $\frac{V}{A_1} > \frac{B_1}{D}, \frac{V}{B_1} > \frac{A_1}{D}$. Nun ist $\mathfrak{A}_2$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{A}_3$; nach Satz 12 besitzt also $\mathfrak{A}_4$ eine mit $\mathfrak{A}_2$, also auch mit $\mathfrak{A}_1$ ähnliche Verfeinerung $\mathfrak{A}_1'$. Die Ketten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ sind Verfeinerungen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$.

b) Nunmehr beweisen wir den Satz allgemein durch einen Induktionsschluß über n. Es ist $B_1 > B$ (Satz 1). Die Ketten $\mathfrak{A}$ und $A > B_1 > B$ besitzen nach dem unter a) Bewiesenen ähnliche Verfeinerungen

$$\mathfrak{A}_0 = A - - A_1 - - A_2 - \cdots - A_m = B,$$
$$\mathfrak{A}_2 = A : : B_1 : : B.$$

Die Ketten $B_1 : : B$ und $B_1 > B_2 > \cdots > B_n = B$ besitzen ähnliche Verfeinerungen, da die zweite von ihnen die Länge $n - 1$ besitzt. Also existieren zwei ähnliche Ketten

$$\mathfrak{A}_3 = A : : B_1 \bullet\bullet B,$$
$$\mathfrak{A}_1' = A : : B_1 \circ\circ B_2 \circ\circ \cdots \circ\circ B_n = B.$$

$\mathfrak{A}_3$ ist eine Verfeinerung von $\mathfrak{A}_2$. Also besitzt $\mathfrak{A}_0$ eine Verfeinerung $\mathfrak{A}_1$, die mit $\mathfrak{A}_3$, also auch mit $\mathfrak{A}_1'$ ähnlich ist. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ sind Verfeinerungen von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$.

8. Ein Quotient $\frac{A}{B}$ $(A \neq B)$ heißt *prim*, wenn er nur die beiden Elemente A und B enthält. Auch jede durch einen primen Quotienten bestimmte Ähnlichkeitsklasse heißt prim. Nach Satz 10 enthält sie *nur* prime Quotienten.

Eine *echte Kette* ist eine Kette, deren Glieder sämtlich voneinander verschieden sind.

Eine echte Kette heißt *vollständig*, wenn sie keine echte Verfeinerung außer sich selbst besitzt.

Aus dem Satz von Schreier folgt dann in bekannter Weise der Satz von Jordan-Hölder:

Satz 14. *Ist $A > B$, so bestimmen alle vollständigen Ketten von A nach B bis auf die Reihenfolge die gleichen (primen) Ähnlichkeitsklassen.*

---

[3]) Vgl. v. d. Waerden, Moderne Algebra 1, Berlin 1930, S. 139.

9. Von Zassenhaus [4]) stammt ein Beweis des Schreierschen Satzes für Gruppen, der zwei ähnliche Verfeinerungen explizit angibt. Dieser Beweis läßt sich auf Halbverbände *nicht* übertragen. Er benutzt nämlich neben der Beziehung zwischen Gruppe und *Normalteiler* noch wesentlich die Beziehung zwischen Gruppe und *Untergruppe*. Er betrachtet also einen (Dedekindschen) Halbverband, dessen Halbverbandsbeziehung in bestimmter Weise einer (nicht Dedekindschen) Verbandsbeziehung untergeordnet ist. Der Beweis von Zassenhaus leistet also mehr als der induktive Beweis, er benutzt aber auch mehr von den Eigenschaften der Gruppe. Die Frage nach solchen einer Verbandsbeziehung untergeordneten Beziehungen, auf die die Schlußweise von Zassenhaus angewendet werden kann, ist kürzlich von O. Ore [1]) behandelt worden.

10. Der durchgeführte Beweis des Schreierschen Satzes benutzt wesentlich die Voraussetzung $A > B$. Diese Voraussetzung läßt sich durch die (nur unwesentlich schwächere) Voraussetzung ersetzen, daß B mit einem Unterelement C von A verkettet ist, denn dann lassen sich zwei Ketten von A nach B um dasselbe Stück bis C verlängern, und es ist $A > C$. Diese Bedingung ist z. B. stets erfüllt, wenn je zwei Elemente aus $\mathfrak{M}$ wenigstens ein gemeinsames Unterelement besitzen, insbesondere dann, wenn ein Letztelement vorhanden ist, wie z. B. im Beispiel 2.

Das Beispiel 3, Abb. 1, zeigt, daß die Bedingung $A > B$ auch in anderen Fällen entbehrlich sein kann. Es existieren vier prime Ähnlichkeitsklassen, nämlich

$$\left(\frac{A}{D}, \frac{B}{E}, \frac{C}{F}\right), \quad \left(\frac{D}{C}, \frac{E}{H}, \frac{F}{K}\right), \quad \left(\frac{A}{B}, \frac{D}{E}, \frac{C}{H}\right), \quad \left(\frac{B}{C}, \frac{E}{F}, \frac{H}{K}\right).$$

Jede der sechs vollständigen Ketten von A nach K bestimmt diese vier Ähnlichkeitsklassen.

Es wäre von Interesse, zu erfahren, ob die Bedingung $A > B$ grundsätzlich entbehrlich ist oder durch welche wesentlich schwächere Bedingung sie ersetzt werden kann.

---

[4]) H. Zassenhaus, Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10** (1934), S. 106—108.

[5]) O. Ore, On the theorem of Jordan-Hölder, Transact. Am. Math. Soc. **41** (1937), S. 266—275.

Eingegangen 18. September 1938.

Über das alternierende Verfahren von Schwarz.

Von *Rolf Nevanlinna* in Helsinki.

§ 1. Einleitung.

1. H. A. Schwarz hat durch sein berühmtes alternierendes Verfahren folgende für die Theorie der konformen Abbildung und der Uniformisierung grundlegende Randwertaufgabe gelöst [1]):

Unter der Annahme, daß das Dirichletsche Problem für zwei Gebiete D_1 und D_2 mit einem nichtleeren Durchschnittsgebiet D_1D_2 lösbar ist, ist dasselbe Problem für das Vereinigungsgebiet $D_1 + D_2$ zu lösen.

2. Die Konstruktion der gesuchten Funktion geschieht bekanntlich durch sukzessive Approximation. Um die Konvergenz des Verfahrens zu erzielen, nahm Schwarz an, daß die Randkurven der Gebiete D_1 und D_2 sich in den (zwei) Schnittpunkten P und Q nicht berühren; d. h. die Ränder sollen in der unmittelbaren Umgebung jener Punkte in Winkeln verlaufen, die außer dem Scheitelpunkt (P bzw. Q) keine gemeinsamen Punkte besitzen.

3. Zweck der vorliegenden Arbeit ist, zu zeigen, daß das Verfahren von Schwarz auch ohne jene zusätzliche Bedingung über den Verlauf der Randkurven stets konvergiert und die Lösung der Randwertaufgabe liefert. Der Konvergenzbeweis ergibt sich einfach mit Hilfe wohlbekannter, allgemeiner potentialtheoretischer Prinzipien (§ 2).

Eine genauere Analyse zeigt, daß die Randwertaufgabe von Schwarz auf eine Integralgleichung zurückgeführt werden kann (§ 3). Das alternierende Verfahren ist nichts anderes als eine Lösung dieser Gleichung durch sukzessive Approximation (§ 4). Die Integralgleichung ergibt sich durch simultane Darstellung der gesuchten Potentialfunktion in den Gebieten D_1 und D_2. Eine ähnliche Methode ist von Lichtenstein bei gewissen anderen potentialtheoretischen Fragen angewandt worden [2]). Dieselbe Methode läßt sich mit Vorteil auch bei verschiedenen allgemeinen Problemen der Uniformierungstheorie verwenden. Auf solche Anwendungen werde ich bei anderer Gelegenheit zurückkommen.

§ 2. Konvergenz des alternierenden Verfahrens.

4. Es wird angenommen, daß die Gebiete D_1 und D_2, für welche das Dirichletsche Problem als lösbar vorausgesetzt wird, von je endlich vielen Jordanbögen Γ_1 bzw. Γ_2

---

[1]) H. A. Schwarz, Ges. Abhandlungen **2**, S. 133—143.

[2]) L. Lichtenstein, Randaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. II., dieses Journal **143** (1913), S. 51—105, sowie: Untersuchungen über die Randwertaufgaben. Periodische und doppeltperiodische Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus, Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie 1911, S. 219—254. Die letzte Arbeit ist mir nicht zugänglich gewesen.

Man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen über die Anwendung der Theorie der Integralgleichungen zur Konstruktion automorpher und gewisser allgemeiner analytischer Funktionen von T. Carleman, Verhandlungen des internationalen Mathematikerkongresses Zürich **1** (1932), insb. S. 147—150.

berandet sind, und daß diejenige Randpunktmenge $\bar{\alpha}$ von D_1, welche in D_2 liegt, ebenfalls aus endlich vielen Jordanbögen besteht [3]). Dasselbe soll für den in D_1 fallenden Teil $\bar{\beta}$ von Γ_2 gelten. Das Vereinigungsgebiet $D_1 + D_2$ wird dann von den komplementären, voraussetzungsgemäß nicht leeren, Randpunktmengen α und β begrenzt ($\alpha + \bar{\alpha} = \Gamma_1$, $\beta + \bar{\beta} = \Gamma_2$). Auch dieser Rand $\Gamma = \alpha + \beta$ setzt sich aus endlich vielen einfachen Bögen zusammen.

Auf Γ sei nun eine stetige Folge f von Randwerten vorgeschrieben [4]). Es gilt dann, eine Funktion $u(z)$ zu konstruieren, die im Gebiete $D = D_1 D_2$ harmonisch ist und die in jedem Randpunkt $z = t$ den gegebenen Wert $f(t)$ annimmt.

5. Nach Schwarz verfährt man hierzu folgendermaßen: Es sei $v_0(z)$ diejenige in D_2 harmonische und beschränkte Funktion, welche durch folgende Randbedingungen eindeutig bestimmt ist:

$$(1) \qquad v_0 = \begin{cases} f & \text{in den inneren Punkten von } \beta, \\ 0 & \text{,, ,, ,, ,, ,, } \bar{\beta}. \end{cases}$$

Alsdann kann man zwei unendliche Folgen von Funktionen u_n, v_n bilden, von denen u_n innerhalb D_1, v_n innerhalb D_2 harmonisch und beschränkt sind, und die durch die Randbedingungen

$$(1') \qquad u_n = \begin{cases} f & \text{in den inneren Punkten von } \alpha \\ v_n & \text{,, ,, ,, ,, ,, } \bar{\alpha} \end{cases} \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

$$v_n = \begin{cases} f & \text{,, ,, ,, ,, ,, } \beta \\ u_{n-1} & \text{,, ,, ,, ,, ,, } \bar{\beta} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

eindeutig festgelegt werden.

Es soll gezeigt werden, 1) daß $\lim u_n = u$ existiert und eine in D_1 harmonische und beschränkte Funktion mit den Randwerten f auf α darstellt; 2) daß $\lim v_n = v$ die entsprechenden Eigenschaften in D_2 bzw. auf β besitzt; 3) daß u und v harmonische Fortsetzungen voneinander sind, d. h. daß die Gleichheit $u = v$ im Gebiete $D_1 D_2$ gilt.

6. Für den Konvergenzbeweis benutzt man nach Schwarz gewöhnlich einen einfachen Hilfssatz über das Maximum einer Potentialfunktion auf einem Querschnitt, der die Randkurve des betreffenden Gebietes nicht berührt. Unter der Annahme, daß die Kurven α und β solche Querschnitte der Gebiete D_2 bzw. D_1 sind, ergibt sich für die Reihen $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ und $\Sigma(v_{n+1} - v_n)$ eine konvergente geometrische Reihe als Majorante.

Indes läßt sich die Konvergenz der Folgen u_n und v_n auch direkt, ohne irgendwelche einschränkenden Bedingungen über den Verlauf der Kurven α und β folgendermaßen beweisen.

7. Man nehme zunächst an, daß die Randwerte $f \geqq 0$ sind. Wenn $M = \limsup f$ ist, so liegen die Randwerte von v_0 im Intervall $(0, M)$ und nach dem Minimum- und Maximumprinzip gilt dann $0 \leqq v_0 \leqq M$ im ganzen Gebiet D_2. Hieraus folgt mit Rück-

[3]) Als *Dirichlet*sches Problem bezeichnen wir hier die Aufgabe, zu einer, mit Ausnahme höchstens endlich vieler Randpunkte, stetigen und beschränkten Randbelegung eine im Innern des Gebietes harmonische und beschränkte Funktion zu bestimmen, welche in jedem Stetigkeitspunkt den gegebenen Randwert annimmt. Aus dem Maximum- und Minimumprinzip folgt, daß nicht mehr als *eine* solche Funktion existieren kann. — In dieser Arbeit wird das Maximumprinzip in folgender Phragmén-Lindelöfschen Fassung benutzt: *Wenn $u(z)$ innerhalb des Gebietes D harmonisch und beschränkt und $\overline{\lim}\, u(z) \leqq M$ ist in jedem Randpunkt, höchstens mit Ausnahme endlich vieler Punkte, so gilt $u(z) \leqq M$ innerhalb D, und $u = M$ nur, wenn konstant $u \equiv M$ ist.*

[4]) Man könnte etwas allgemeiner eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten zulassen, wenn nur f als *beschränkt* vorausgesetzt wird. Überhaupt würden die nachfolgenden Überlegungen, mit unwesentlichen Modifikationen, unter noch allgemeineren Voraussetzungen über die Ränder Γ_1 und Γ_2 und die Belegung f zum Ziel führen. Für die wichtigsten Anwendungen sind schon die obigen Annahmen weit genug.

sicht auf die Randbedingungen (1′), daß allgemein $0 \leqq u_n \leqq M$ in D_1 und $0 \leqq v_n \leqq M$ in D_2 gilt.

Wir betrachten nun die Differenzen $v_{n+1} - v_n$ und $u_{n+1} - u_n$. Zunächst ist $v_1 = v_0 = f$ auf β und $v_1 = u_0 \geqq 0$, $v_0 = 0$ auf $\bar{\beta}$, also jedenfalls $v_1 - v_0 \geqq 0$ in den inneren Punkten der Bögen β und $\bar{\beta}$. Da diese Differenz in der Umgebung der Endpunkte jener Bögen beschränkt bleibt, so gilt nach dem Minimumprinzip $v_1 - v_0 \geqq 0$ im ganzen Gebiet D_2.

Unter Anwendung der Randbedingung

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \alpha \\ v_{n+1} - v_n & \text{auf } \bar{\alpha} \end{cases} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \\ v_{n+1} - v_n &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \beta \\ u_n - u_{n-1} & \text{auf } \bar{\beta} \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

schließt man nun weiter durch wiederholte Anwendung des Minimumprinzipes, daß die Beziehungen $u_{n+1} - u_n \geqq 0$, $v_{n+1} - v_n \geqq 0$ für jedes n im Gebiete D_1 bzw. D_2 bestehen.

8. Da die Folgen u_n, v_n monoton sind und u_n, $v_n \leqq M$ gilt, so existieren die Grenzwerte

$$\lim u_n = u\,, \qquad \lim v_n = v$$

in den Gebieten D_1, D_2 und zwar (Harnacks Prinzip) gleichmäßig in jedem inneren abgeschlossenen Teilbereich von D_1 bzw. D_2.

Die Grenzfunktionen u und v sind innerhalb D_1 bzw. D_2 harmonisch und beschränkt ($0 \leqq u \leqq M$, $0 \leqq v \leqq M$). Im Durchschnittsgebiet $D_1 D_2$ gilt die Identität $u \equiv v$. Denn nach (1′) hat man $v_{n+1} - u_n = 0$ auf $\bar{\beta}$ und $= u_{n+1} - u_n$ auf $\bar{\alpha}$, und durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt hieraus, daß $v - u = 0$ in jedem inneren Punkt jener Bögen ist. In der Umgebung der Endpunkte von $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ bleibt $v - u$ beschränkt, und man schließt also, daß tatsächlich $u = v$ im ganzen Gebiet $D_1 D_2$ gelten muß.

9. Wir kommen zum Verhalten der Funktionen u und v auf dem Rand $\Gamma = \alpha + \beta$. Daß z. B. u in jedem inneren Punkt t der Bögen α stetig und gleich $f(t)$ ist, ergibt sich folgendermaßen. Man vergleiche u einerseits mit der oben gebildeten Funktion u_0, andererseits mit der Funktion U_0, die ebenfalls gleich f auf α ist, während sie auf $\bar{\alpha}$ den konstanten Wert M annimmt. Auf dem Rand von D_1 gilt dann $u_0 \leqq u \leqq U_0$, und diese Beziehung besteht also nach dem Maximum- und Minimumprinzip auch im Innern von D_1. Da nun sowohl u_0 als U_0 stetig gleich $f(t)$ für $z = t$ sind, so gilt dasselbe auch für u.

In entsprechender Weise sieht man ein, daß die Funktion u, welche durch v in das Gebiet D_2 fortgesetzt wird, in jedem inneren Punkt von β den vorgeschriebenen Randwert $f(t)$ hat.

Daß schließlich auch $u \to f(t)$ in den Endpunkten von α und β gilt, ist eine unmittelbare Folgerung eines klassischen allgemeinen potentialtheoretischen Satzes [5]).

10. Der obige Beweis setzt voraus, daß die vorgegebene Randbelegung f nichtnegativ ist. Dies kann stets durch Addition einer genügend großen Konstanten erreicht

[5]) Der Satz lautet: Wenn $u(z)$ innerhalb eines von einer einfachen Kurve Γ begrenzten Gebietes D harmonisch und beschränkt ($|u| \leqq M$) und auf Γ stetig ist, mit Ausnahme des Randpunktes $z = \zeta$, wenn ferner in diesem Punkte der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert $u(\zeta) = 0$ auf der Kurve Γ existiert, so gilt in D für $z \to \zeta$ gleichmäßig $u(z) \to 0$.

Ein einfacher Beweis ist folgender: Man transformiere D durch $t = \log(z - \zeta)$ in ein Gebiet D_t der t-Ebene; sei D_s dasjenige Teilgebiet von D_t, das durch die Beziehung $\Re t < s$ bestimmt ist, wobei s so gewählt wird, daß $|u| < \varepsilon$ auf dem auf D_s fallenden Teil der Bildkurve von Γ gilt. Man wähle auf der Geraden $\Re t = s$ ein Segment $d_s \leqq 2\pi$, so daß der komplementäre Teil der Geraden außerhalb D_s liegt, und bezeichne durch $\omega(t)$ denjenigen Winkel, unter dem d_s vom Punkte t erscheint. Dann hat man in $v = \varepsilon + \frac{M\omega}{\pi}$ eine harmonische Majorante von $|u|$ in D_s, und da $v \to \varepsilon$ für $z \to \zeta$, so ergibt sich in $z = \zeta$ der gesuchte Grenzwert $u \to 0$.

werden. Es ist aber leicht einzusehen, daß die direkte Anwendung des alternierenden Verfahrens auf f stets zum Ziel führt, auch wenn f sein Vorzeichen wechselt.

Schreibt man nämlich f als Differenz zweier nichtnegativen Belegungen f^+ und f^- (man kann z. B. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ wählen), und setzt man das alternierende Verfahren mit den drei Belegungen f, f^+ und f^- an, so bestehen für die entsprechenden Näherungsfunktionen $u_n, v_n, u_n^+, v_n^+, u_n^-, v_n^-$ die Relationen

$$u_n = u_n^+ - u_n^-, \qquad v_n = v_n^+ - v_n^-.$$

Nach Obigem streben u_n^+ und v_n^+ gegen die Lösung u^+ der Randwertaufgabe für die Belegung f^+, u_n^- und v_n^- gegen die entsprechende Lösung u^- für die Belegung f^-, und somit konvergieren u_n, v_n gegen die Differenz $u^+ - u^-$, welche die gesuchte Lösung für die Randwerte f darstellt.

§ 3. Die Integralgleichung.

11. Wir wollen nun die Schwarzsche Randwertaufgabe etwas näher untersuchen und erinnern zunächst an einige bekannte potentialtheoretische Begriffe.

Es sei D ein Gebiet, das von einer endlichen Anzahl einfacher Bögen Γ begrenzt wird [6]). Wenn das Dirichletsche Problem für D lösbar ist, so kann man insbesondere das *harmonische Maß* $\omega(z, \alpha)$ eines gegebenen Randstückes α konstruieren, das von einer endlichen Anzahl einfacher Teilbögen α von Γ gebildet wird. Es ist ω als diejenige in D harmonische und beschränkte Funktion erklärt, die auf α den Randwert 1 hat und auf dem komplementären Randteil $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} + \alpha = \Gamma$) verschwindet. Wenn weder α noch $\bar{\alpha}$ den ganzen Rand Γ umfaßt, so gilt in jedem inneren Punkt von D

$$0 < \omega < 1.$$

12. Man lasse den Randpunkt $z = t$, von einem beliebig gewählten Anfangspunkt $t = t_0$ ausgehend, den Rand Γ einmal beschreiben, bezeichne durch α_t den Teilbogen von t_0 bis t und setze $\omega(z, \alpha_t) = \omega(t, z)$. Sei nun $f(t)$ eine vorgegebene stetige Folge von Randwerten auf Γ. Dann stellt bekanntlich und wie unmittelbar einzusehen ist das Integral

$$u(z) = \int_\Gamma f(t)\, d\omega(t, z), \tag{3}$$

wo die Integration über Γ in dem festgelegten Sinn ($d\omega \geqq 0$) zu erstrecken ist, die Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe dar: $u(z)$ ist in D harmonisch, und es gilt $u(z) \to f(t)$ für $z \to t$.

13. Nach dieser vorbereitenden Bemerkung gehen wir zu dem in Nr. **4** formulierten Randwertproblem von Schwarz zurück. Wir wählen auf den Rändern Γ_1 und Γ_2 der gegebenen Gebiete D_1 und D_2 je einen Anfangspunkt, etwa einen gemeinsamen Randpunkt t_0, und eine Umlaufsrichtung, und bezeichnen durch $\omega_1(x, z)$, $\omega_2(y, z)$ die harmonischen Maße derjenigen Randbögen von D_1 bzw. D_2, welche von einem Randpunkt t beschrieben werden, wenn er sich, in dem festgelegten Sinn, auf dem Rand Γ_1 bzw. Γ_2 vom Punkte $t = t_0$ bis $t = x$ bzw. $t = y$ bewegt. Da das Dirichletsche Problem voraussetzungsgemäß für D_1 und D_2 lösbar ist, so sind diese Funktionen ω_1 und ω_2 als bekannt anzunehmen.

14. Wir nehmen zunächst an, daß die gestellte Randwertaufgabe eine beschränkte Lösung $u(z)$ hat; u ist also in $D = D_1 + D_2$ harmonisch und nimmt auf dem Rand

---

[6]) D ist als Teilgebiet der funktionentheoretischen Ebene oder allgemeiner eines gegebenen Riemannschen Flächenstückes aufzufassen. Im letzteren Falle bezeichnen die benutzten komplexen Veränderlichen (z, t usw.) die entsprechenden Ortsuniformisierenden.

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ die vorgeschriebenen Randwerte f an. Dann läßt sie sich im Gebiet D_1 mit Hilfe der Formel (3) darstellen:

$$u(z) = \int_{\Gamma_1} u(x)\, d\omega_1(x, z) = A(z) + \int_{\bar{\alpha}} u(x)\, d\omega_1(x, z), \tag{4}$$

wo

$$A(z) = \int_{\alpha} f(x)\, d\omega_1(x, z) \tag{4'}$$

offenbar diejenige in D_1 harmonische und beschränkte Funktion ist, die auf α die Randwerte f hat und auf $\bar{\alpha}$ verschwindet.

In entsprechender Weise findet man für z in D_2

$$u(z) = B(z) + \int_{\bar{\beta}} u(y)\, d\omega_2(y, z), \tag{5}$$

und hier ist

$$B(z) = \int_{\beta} f(y)\, d\omega_2(z, y) \tag{5'}$$

in D_2 harmonisch, auf β gleich f und auf $\bar{\beta}$ gleich Null.

15. Wählt man in (5) speziell den Punkt $z = x$ auf $\bar{\alpha}$ und führt man den entsprechenden Ausdruck für $u(x)$ rechts in (4) ein, so wird in D_1

$$u(z) = a(z) + \int_{\bar{\beta}} u(y)\, d\varphi(y, z) \tag{6}$$

mit

$$\begin{cases} a(z) = A(z) + \int_{\bar{\alpha}} B(x)\, d\omega_1(x, z), \\ \varphi(y, z) = \int_{\bar{\alpha}} \omega_2(y, x)\, d\omega_1(x, z). \end{cases} \tag{6'}$$

Die hier vorgenommene Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen ist wegen der Beschränktheit der vorkommenden Funktionen statthaft.

Die Funktion $a(z)$ ist in D_1 harmonisch, nimmt auf α die vorgegebenen Randwerte f an und ist auf $\bar{\alpha}$ gleich B.

Auch $\varphi(y, z)$ ist, wie auch immer der Punkt y auf Γ_2 gewählt wird, eine harmonische Funktion von z in D_1, und zwar nimmt sie in einem Punkt x von $\bar{\alpha}$ den Randwert $\omega_2(y, x)$ an, während sie auf α verschwindet. Da $0 \leqq \omega_2 \leqq 1$, so folgt aus dem Prinzip des Maximums und Minimums oder auch direkt aus (6'), daß auch $0 \leqq \varphi(y, z) \leqq 1$ im ganzen Gebiet D_1 gilt. Ferner ist zu bemerken, daß $\omega_2(y, x)$, falls x auf α festgelegt wird, monoton zunimmt, wenn sich der Punkt y im gewählten Sinn auf Γ_2 bewegt. Wieder zeigt das Maximumprinzip, daß auch die Funktion $\varphi(y, z)$ hierbei, in jedem Punkt von D_1, monoton wächst, und zwar von 0 bis $\omega(z, \bar{\alpha})$. Das Differential $d\varphi$ im Stieltjesintegral (6) ist also nichtnegativ.

16. Wir wählen nunmehr den Punkt z insbesondere auf den Bögen $\bar{\beta}$, und schließen aus den obigen Überlegungen, daß die Lösung u der Schwarzschen Randwertaufgabe die Integralgleichung zweiter Art

$$v(t) = a(t) + \int_{\bar{\beta}} v(y)\, d\varphi(y, t) \qquad (y, t \text{ auf } \bar{\beta}) \tag{7}$$

befriedigt, wo $a(t)$ und $\varphi(y, t)$ durch die Beziehungen (4'), (5'), (6') gegeben sind.

Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend. Wir werden beweisen:

Wenn die Integralgleichung (7) für t auf $\bar{\beta}$ eine Lösung $v(t)$ besitzt, so existiert auch eine Funktion $u(z)$, welche die gestellte Randwertaufgabe löst.

17. Zunächst hat man in

$$u_1(z) = a(z) + \int_{\bar{\beta}} v(y)\, d\varphi(y, z) \tag{8}$$

eine in D_1 harmonische Funktion, welche auf α die vorgegebenen Randwerte f annimmt. Denn a und φ sind in D_1 harmonisch, a hat auf α die Randwerte f, und φ ist gleich 0 auf α (Nr. **15**).

Ferner stellt der Ausdruck

$$u_2(z) = B(z) + \int_{\bar{\beta}} v(y)\, d\omega_2(y, z) \tag{8'}$$

eine in D_2 harmonische Funktion dar, welche auf β die Randwerte $B = f$ annimmt (vgl. (5')).

Diese Funktionen u_1 und u_2 sind harmonische Fortsetzungen voneinander. Denn auf $\bar{\beta}$ gilt $B = 0$ und also $u_2 = v$ und, wegen (7) und (8), auch $u_1 = v$, also $u_1 = u_2$. Auf $\bar{\alpha}$ ist wiederum nach (6')

$$\varphi(y, z) = \omega_2(y, z), \qquad a(z) = B(z)$$

und somit nach (8) und (8')

$$u_1(z) = B(z) + \int_{\bar{\beta}} v(y)\, d\omega_2(y, z) = u_2(z).$$

Die harmonische Funktion $u_1 - u_2$ verschwindet also auf dem ganzen Rand $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ des Durchschnittsgebiets $D_1 D_2$, und nach dem Maximum- und Minimumprinzip wird $u_1 = u_2$ in jedem gemeinsamen Punkt der Gebiete D_1 und D_2.

Setzt man nun $u(z) = u_1(z)$ oder $u(z) = u_2(z)$, je nachdem z in D_1 oder D_2 liegt, so ist u als eine im ganzen Gebiet $D_1 + D_2$ harmonische Funktion erklärt, welche die vorgegebenen Randwerte f besitzt, w. z. b. w. [7]).

18. Setzt man in Nr. **14** umgekehrt den Ausdruck (4) in (5) ein, so wird man zu der Integralgleichung

$$v(t) = b(t) + \int_{\bar{\alpha}} v(x)\, d\psi(x, t) \qquad (x, t \text{ auf } \bar{\alpha}) \tag{9}$$

geführt, wo

$$\begin{cases} b(t) = B(t) + \int_{\bar{\beta}} A(y)\, d\omega_2(y, x), \\ \psi(x, t) = \int_{\bar{\beta}} \omega_1(x, y)\, d\omega_2(y, t). \end{cases} \tag{9'}$$

Die Lösbarkeit dieser Integralgleichung ist gleichfalls notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe.

§ 4. Lösung der Integralgleichung.

19. Die Integralgleichung

$$u(t) = a(t) + \int_{\bar{\beta}} u(y)\, d\varphi(y, t) \qquad (y, t \text{ auf } \bar{\beta}) \tag{10}$$

kann leicht auf bekannte Weise durch sukzessive Approximation gelöst werden.

---

[7]) Wenn $u(z)$ beschränkt ist, so gilt nach Nr. **9** (Fußnote [5])) $u \to f$ auch in den gemeinsamen Punkten der Bögen α und β. Aus den Überlegungen von § 4 wird folgen, daß $u(z)$ dann und nur dann im Gebiet $D = D_1 + D_2$ beschränkt ist, wenn die entsprechende Lösung $v(t)$ der Integralgleichung auf $\bar{\beta}$ beschränkt ist. Funktionen $u(z)$, die in jenen Endpunkten unendlich werden, können auch Lösungen $v(t)$ der Integralgleichung entsprechen, welche in der Nähe der Endpunkte der Bögen $\bar{\beta}$ unbeschränkt wachsen.

Man setze $u_{-1} = 0$ und allgemein

$$u_n(t) = a(t) + \int_{\bar{\beta}} u_{n-1}(y)\, d\varphi(y, t) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{11}$$

Nimmt man wie oben an, daß $0 \leqq f \leqq M$, so wird nach (4′) und (5′) zunächst in D_1 bzw. D_2

$$0 \leqq A(z) \leqq M\omega_1(z, \alpha), \quad 0 \leqq B(z) \leqq M\omega_2(z, \beta),$$

wo ω_1 und ω_2 die harmonischen Maße von α, β in bezug auf D_1, D_2 sind, und es gelten also für die Funktion

$$a(t) = A(t) + \int_{\bar{\alpha}} B(x)\, d\omega_1(x, t)$$

die Beziehungen

$$0 \leqq a(t) \leqq M[\omega_1(t, \alpha) + \int_{\bar{\alpha}} \omega_2(x, \beta)\, d\omega_1(x, t)].$$

Gesetzt, es sei $0 \leqq u_{n-1}(t) \leqq M$, so ergibt sich aus (11), daß

$$0 \leqq u_n(t) \leqq M[\omega_1(t, \alpha) + \int_{\bar{\alpha}} \omega_2(x, \beta)\, d\omega_1(x, t) + \int_{\bar{\beta}} d\varphi(y, t)]$$

und wegen (vgl. (6′))

$$\int_{\bar{\beta}} d\varphi = \int_{\bar{\alpha}} \omega_2(x, \bar{\beta})\, d\omega_1(x, t)$$

und der evidenten Beziehungen

$$\omega_2(x, \beta) + \omega_2(x, \bar{\beta}) \equiv 1, \quad \omega_1(t, \alpha) + \omega_1(t, \bar{\alpha}) \equiv 1$$

wird dann auch

$$0 \leqq u_n(t) \leqq M$$

sein.

Diese Beziehung ist aber für $n = -1$ richtig; folglich besteht sie für jedes n.

20. Ferner gilt nach (11) für $n = 0, 1, \ldots$

$$u_{n+1}(t) - u_n(t) = \int_{\bar{\beta}} (u_n(y) - u_{n-1}(y))\, d\varphi(y, t),$$

und da $u_0 - u_{-1} \equiv u_0 \geqq 0$ ist, so schließt man, daß allgemein $u_n(t) \leqq u_{n+1}(t)$. Es existiert somit der Grenzwert $\lim u_n(t) = u(t)$. Diese Funktion ist wegen ihrer Beschränktheit integrabel, und die Beziehung (11) zeigt, daß sie in jedem Punkt von $\bar{\beta}$ der gegebenen Integralgleichung (10) genügt.

21. Wenn f sein Vorzeichen wechselt, so bilde man zwei nichtnegative Funktionen f^+ und f^-, für welche $f = f^+ - f^-$, und bestimme durch (6′) die entsprechenden Funktionen a, a^+, a^-, für welche dann auch $a = a^+ - a^-$ gilt. Dann ist die Lösung der Integralgleichung (10) gleich der Differenz der Lösungen u^+, u^- der entsprechenden Gleichungen,wo statt a bzw. a^+, a^- steht.

Nachdem die Integralgleichung gelöst worden ist, findet man die entsprechende Lösung der Randwertaufgabe mittels des in Nr. **17** angegebenen Verfahrens.

Man sieht unmittelbar ein, daß die hier konstruierten Näherungsfunktionen mit der in § 2 durch das alternierende Verfahren gebildeten Folge u_n übereinstimmen.

22. Es sei schließlich bemerkt, daß die Einzigkeit einer *beschränkten* Lösung u der Integralgleichung (10), die ja eine Folgerung aus dem Zusammenhang der Lösung mit der Randwertaufgabe ist, auch direkt aus jener Gleichung erschlossen werden kann.

Dagegen gibt es Fälle, wo die Integralgleichung, neben der oben konstruierten beschränkten Lösung, weitere nichtbeschränkte Lösungen aufweist, oder, was dasselbe bedeutet, wo die entsprechende homogene Gleichung

$$u(t) = \int_{\bar{\beta}} u(y)\, d\varphi(y, t),$$

außer der trivialen Lösung $u = 0$, auch von nicht identisch verschwindenden Funktionen u befriedigt wird.

Die entsprechende Potentialfunktion $u(z)$ wird dann in irgendeinem der Endpunkte von $\bar{\beta}$ *unstetig* sein.

Ein einfaches Beispiel hierfür sei angeführt. Man wähle für D_1 und D_2 zwei Halbebenen, deren Begrenzungsgeraden einander senkrecht schneiden. $D = D_1 + D_2$ ist also ein Winkelgebiet der Größe $\frac{3\pi}{2}$. Bezeichnen dann y und t den Abstand der entsprechenden, gleichbezeichneten Punkte auf dem Halbstrahl $\bar{\beta}$ vom Scheitel des Winkels D, so wird die Kernfunktion

$$\varphi(y, t) = \int_0^y \frac{t}{y^2 - t^2} \log \frac{y}{t}\, dy,$$

und die entsprechende homogene Gleichung

$$u(t) = \int_0^\infty u(y) \frac{t}{y^2 - t^2} \log \frac{y}{t}\, dy$$

hat als nichttriviale Lösungen die Funktionen

$$u = c_1 t^{2/3} + c_2 t^{-2/3}.$$

Eingegangen 2. November 1938.